卓上型電子計算機によるいくつかの計算例

その2　行列計算の試み

吉　井　守　正　（鉱　床　部）

1.　規模の異なる多数の配列

配列宣言のできない計算機で　配列をもつデータを処理する方法について前回は述べたが　そのとき扱ったのは二次元または三次元の配列が1個だけある場合であった．　そこで今回は　配列の規模が異なる多数の配列を処理する方法について考えてみよう．

配列を処理するには　その要素とメモリーの番地との対応をつける関係式をもとにした配列用サブルーチンを実行させるとよい　という事を前回に述べた．　その関係式についてもう一度触れておこう．　m行n列の二次元配列が1個あるとき　Y並びではその要素a_{ij}に対して

$$y=(i-1)n+j+c \cdots\cdots(1)$$

また　同じく三次元配列に対しては

$$y=(i-1)n+j+(k-1)mn+c \cdots\cdots(2)$$

という式によって　配列要素に対応するメモリーの番地yが求められるのであった．　ところでこの三次元配列は　見方を変えると同じ配列規模をした多数（k個）の二次元配列と考える事もできる．　この考えを発展させて行くと　行列計算が可能なシステムを作れるのである．これについて説明しよう．

いまここに任意の配列規模をもつ多数の配列があるとしよう．　これらを同じ配列規模をもつもの同士をひとまとめにして分類する．　言い換えれば　これらの配列を配列規模別にグループ分けしてみる．　そしてグループ単位でメモリーに割り付ける．　このようすを第1図に示す．　このとき　第p番のグループに属する　第k_p番目の配列要素とメモリーの番地との関係式は

$$y=(i-1)n+j+(k_p-1)m_pn_p+c_p \cdots\cdots(3)$$

となる．　ここにm_pは第pグループの配列がもつ行数　n_pは同じく列数　c_pは定数である．　このc_pは具体的には第p—1グループまでに割り当てられた番地の数である．　すなわち

$$c_p=\sum_{h=1}^{p-1}m_hn_hN_h+c \cdots\cdots(4)$$

という式で表わされるものである．　ここにm_hは第hグループがもつ行数　n_hは同じく列数　N_hはそのグループに属する配列の数である．

(4)式のc_pは　グループごとに異なるが　実際には計算をすべき配列が最初に指定されるので　c_pは定数となる．配列の指定により(3)式のk_p　m_p　n_pの項も定数となるので　(3)式は結局

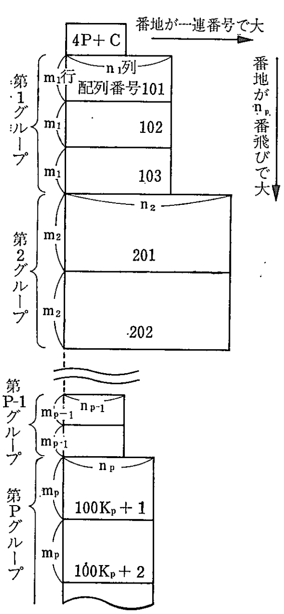
$$y=(i-1)n+j+d \cdots\cdots(5)$$

という(1)にも似た簡単な形になる．　ここに

$$d=(k_p-1)m_pn_p+c_p \cdots\cdots(6)$$

である．

このdの値をあらかじめ何らかの方法で求めておけば



第1図
規模の異なる配列の並び
配列を規模別にグループ分けして並べる考え方を示す．
メモリーの番地は　図の左から右へ一連番号で　また上から下へn_p番飛びにふえるものとする．　第1グループの上にある$4p+c$個の番地は内部数表（$4p$個）と計算用（c個）のものである．

(5)式を実行する配列用サブルーチンによって　すべての配列の処理も　前回に述べたような手軽さで行なう事ができるのである．　その具体的な方法についてつぎに述べよう．

2. 配　列　宣　言

(6)式の d の値は　グループ番号 p　そのグループに属する配列の行数 m_p　列数 n_p　定数 c_p　などグループ固有の値と　グループの配列番号 k_p とから求める事ができる．　したがってあらかじめこれらグループに固有の値をメモリーに記憶しておき　必要のつど取り出して d を求めるようにすればよい．

このためにメモリーの若い方の番地を使ってひとつの数表を作る事にする．　これを内部数表と呼ぶ．　内部数表は　その行要素が各グループに対応し　各列は1列目から順に　そのグループに属する配列の行数 m_p 列数 n_p　定数 c_p　個数 N_p に対応するものとする．　その配列規模は　したがって p 行4列である．

内部数表に数値を書き込む作業は　FORTRAN　などで行なうDIMENSION宣言に相当するもので　筆者の方式でも一応　配列宣言と呼ぶ事にしよう．

配列宣言には　宣言用のプログラムを使う．　その行程と内部数表を第2図に示す．　配列宣言では　まずグループ数を定める．　そして第1グループから順に行数 m_p　列数 n_p　配列個数 N_p を入力する．　定数 c_p については　これらの入力値をもとにプログラムの中で計算して求める．　具体的には第1グループの定数 c_1 は　内部数表用の番地数 $4p$（p 行4列だから）と計算用の番地数 c の和であるから

$$c_1=4p+c$$

第2グループでは

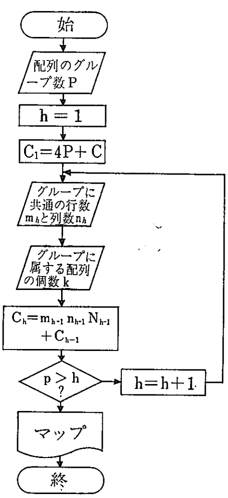
$$c_2=m_1n_1N_1+c_1$$

一般に第 p グループでは

$$c_p=m_{p-1}n_{p-1}N_{p-1}+c_{p-1}$$

の関係となる．　これらはもちろん内容的に(4)式と同じである．

筆者の方式では　宣言できるグループ数 p　行数 m_p については無制限　列数は999以下　同一グループの配



グループNo.	行数	列数	定　数	個数
1	m_1	n_1	$C_1=4P+C$	N_1
2	m_2	n_2	$C_2=m_1n_1N_1+C_1$	N_2
⋮				
P	m_p	n_p	$C_p=m_{p-1}n_{p-1}N_{p-1}+C_{p-1}$	N_p

第2図
配列宣言の行程と内部数表
(a)　流 れ 図
ここでいう配列宣言とは
内部数表に数値を記入する
作業の事である．
(b)　内 部 数 表

```
=ARRAY=
JOB NO.
 775071
NUM GRP
      5
-------
GRP NO.
      1
DIM
  2.003
NUM ARY
      3
-------
GRP NO.
      2
DIM
  3.002
NUM ARY
      2
-------
GRP NO.
      3
DIM
  2.002
NUM ARY
      1
-------
GRP NO.
      4
DIM
  3.003
NUM ARY
      2
-------
GRP NO.
      5
DIM
  4.004
NUM ARY
      3

**MAP**
JOB NO.
 775071
NUM GRP
      5
-------
GRP NO.
      1
DIM
  2.003
ARY NO.
    101
      1
     66
     69
      2
     67
     70
      3
     68
     71
ARY NO.
    102
      1
     72
     75
      2
     73
     76
      3
     74
     77
ARY NO.
    103
      1
     78
     81
      2
     79
     82
      3
     80
     83
-------
GRP NO.
      2
DIM
  3.002
ARY NO.
    201
      1
     84
     86
     88
      2
     85
     87
     89
ARY NO.
    202
      1
     90
     92
     94
      2
     91
     93
     95
-------
GRP NO.
      3
DIM
  2.002
ARY NO.
    301
      1
     96
     98
      2
     97
     99
-------
GRP NO.
      4
DIM
  3.003
ARY NO.
    401
      1
    100
    103
    106
      2
    101
    104
    107
      3
    102
    105
    108
ARY NO.
    402
      1
    109
    112
    115
      2
    110
    113
    116
      3
    111
    114
    117
-------
GRP NO.
      5
DIM
  4.004
ARY NO.
    501
      1
    118
    122
    126
    130
      2
    119
    123
    127
    131
      3
    120
    124
    128
    132
      4
    121
    125
    129
    133
ARY NO.
    502
      1
    134
    138
    142
    146
      2
    135
    139
    143
    147
      3
    136
    140
    144
    148
      4
    137
    141
    145
    149
ARY NO.
    503
      1
    150
    154
    158
    162
      2
    151
    155
    159
    163
      3
    152
    156
    160
    164
      4
    153
    157
    161
    165

+++++++
INT TBL
GRP=
      1
L=,C=
     46
     47
CT=,N=
     48
     49
GRP=
      2
L=,C=
     50
     51
CT=,N=
     52
     53
GRP=
      3
L=,C=
     54
     55
CT=,N=
     56
     57
GRP=
      4
L=,C=
     58
     59
CT=,N=
     60
     61
GRP=
      5
L=,C=
     62
     63
CT=,N=
     64
     65
+++++++
```

第3図
配列宣言とマップ
左はじの列が配列宣言の内容でここでは5つのグループ（GRP）が宣言されている．　各グループに属する配列規模（DIM）は2.003（2行3列）などと表示されている．　そのグループの配列個数（NUM ARY）も示されている．
マップでは宣言された配列の番号（ARY NO.）順に　各配列の要素に対応するメモリーの番地を　列要素単位に示している（区切りの数字は列番号）．
マップの末尾には　内部数表（INT TBL）用のマップが付き　各グループの行数（L）列数（C）定数（CT）そして配列個数（N）の記入されている番地を示している．
なお　ここに示すものは　本文中で計算例を示したテストデータの宣言内容である．

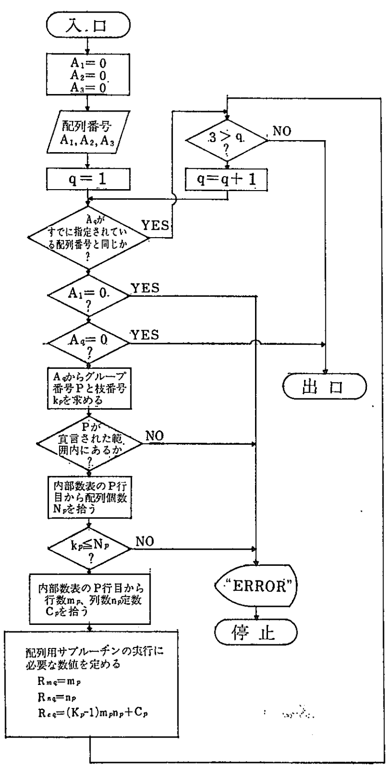
列個数 N_p は99以下である．

配列宣言によって作られた配列には　3ケタ以上の番号が付けられる．　この番号の百位以上はグループ番号 p を表わし　百位未満は枝番号すなわちグループ内の配列番号 k_p を表わす．　これ以後　配列はこの配列番号で呼び出される．

宣言が終ると　作られた配列のマップが配列番号順に印刷される．　このマップによれば　任意の配列の要素とそれを収容するメモリーの番地との関係がひと目でわかる．　配列要素の部分的な処理などは　配列用のサブルーチンを持ち出さず　このマップを頼りに行なった方が簡単である．　マップの末尾には内部数表用のマップも付いている．　配列宣言とマップの例を第3図に示す．

宣言内容は内部数表にデータとして入れられているのだから　これをレコードしておき　必要なときに計算機に入力すればよい．　一度宣言した内容は変更がない限りいつまでも有効であり　たとえば計算実行のつど同じ配列宣言をやり直す必要などまったくない．　宣言用のプログラムも用が済んだら消してしまってよい．

一度行なわれた配列宣言を　あとから訂正することも簡単である．　宣言内容の変更は内部数表の内容を書き換える事と同じである．　したがって　一般のデータの訂正と同じ気軽さで行なえる．　ただし　間違いを防ぐ意味で　訂正の範囲をひとつのグループ内で行なうようにした方が無難である．　この場合その配列の行数×列数×個数（＝その配列に割り当てられた番地の数）が増さない範囲でなら　行数・列数・個数をどのように変更してもよい．　内部数表の変更は　内部数表用のマップを見て行なえばよい．



第4図　配列番号をもとに配列用サブルーチンを設定する行程
本文中のSSサブルーチンの行程である．
行列計算で必要とする3個までの配列番号から　その配列用のサブルーチンを

3. 行　列　計　算

では宣言された配列を呼び出して行列計算を行なう方法について述べよう．

配列を呼び出し　その配列に対応する配列用サブルーチンを設定するまでの行程は　つぎのとおりである．

まず呼び出された配列の配列番号は百位以上の数とそれ未満の数に分離され　これらをもとにグループ番号 p と枝番号 k_p が割り出される．　つぎに内部数表の第 p 行目の各列から m_p　n_p　c_p そして N_p の値が取り出される．　N_p は k_p が宣言された枝番号かどうかすなわち　$k_p \leqq N_p$ であるかのチェックに使う．　これらの値から(6)式の d を求めて(5)式へ入れる．　これでその配列番号に対する配列用サブルーチンが設定された事になる．この行程を SS という名のサブルーチンにして使う事にする．　その行程を第4図に示す．

行列計算で使う配列用サブルーチンを第1表に示す．これらの中で　YAY サブルーチンは必ず使うのでこれを主サブルーチンと呼ぶ事にする．　配列をただ1個だけ処理する場合は YAY だけで行なう．　しかし一般の行列計算では　最大3個までの配列を同時に取り扱う必要があるので　これらの配列を A_1　A_2　A_3 とすれば　A_1 には主サブルーチンが　A_2 と A_3 には補助サブルーチンがそれぞれ使われる．　行列計算の目的によって補助サブルーチンは異なり　つぎに示すような行列計算を行なうためには　第1表に示すような多くの種類のサブルーチンが必要となる．

第1表　行列計算で使う配列用サブルーチン

サブルーチン名	用途		対象とする配列	ステートメント
YAY	主サブルーチン		A_1	$y=(i-1)R_{n1}+j+R_{c1}$
YAZ	補助サブルーチン	逆行列	A_1	$z=(l-1)R_{n1}+j+R_{c1}$
YBY		加減算・複写・逆行列	A_2	$y=(i-1)R_{n2}+j+R_{c2}$
YBX		乗　算		$x=(j-1)R_{n2}+l+R_{c2}$
YBXT		転　置		$x=(j-1)R_{n2}+i+R_{c2}$
YBZ		逆行列		$z=(l-1)R_{n2}+j+R_{c2}$
YCY		加減算	A_3	$y=(i-1)R_{n3}+j+R_{c3}$
YC*Y		乗　算		$y=(i-1)R_{n3}+l+R_{c3}$

第2表 行 列 計 算 用 の プ ロ グ ラ ム

プログラム名	内　容	必要な配列	配列用サブルーチン	条　件
EMX	データの入力			
PMX	データの印刷			
C	データの訂正			
ZMX	配列要素をすべて0にする	A_1	YAY	
IMX	単位行列にする			$A_1(m, m)$
SMX	行列をスカラー倍する			
DT3	3行3列の行列の値を求める			$A_1(3, 3)$
CMX	配列要素の複写	A_1 A_2	YAY YBY	$A_1(m, n)$ $A_2(m, n)$
A+B	行列の加算		YAY YBY YCY	$A_1(m, n)$ $A_2(m, n)$ $A_3(m, n)$
A−B	行列の減算	A_1 A_2 A_3		
A＊B	行列の乗算		YAY YBX YC＊Y	$A_1(m, n)$ $A_2(n, p)$ $A_3(m, p)$ で $A_1 \neq A_2 \neq A_3$
TMX	転置行列を求める	A_1 A_2	YAY YBXT	$A_1(m, n)$ $A_2(n, m)$ で $A_1 \neq A_2$
IVM	逆行列を求める	A_1 A_2 A_3	YAY YBY YAZ YBZ	$A_1(m, m)$ $A_2(m, m)$ $A_3(m, m)$ で $A_1 \neq A_3$

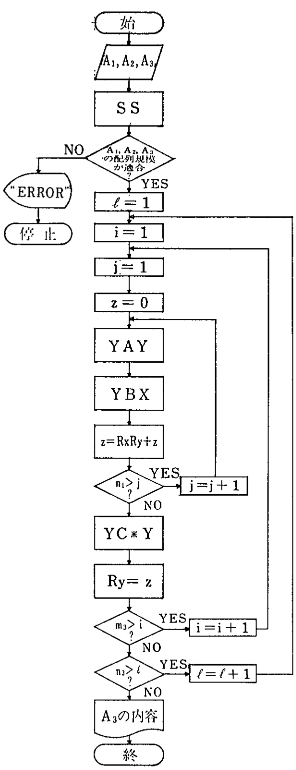
$A_1(m, n)$ は 配列 A_1 が m 行 n 列の規模をもつ事を示す. $A_1(m, m)$ は A_1 が正方行列に限る事を意味する.
$A_1 \neq A_2 \neq A_3$ は 配列番号が互いに異ならねばならない事を示す.

筆者が用意した行列計算用プログラムの内容を列挙する.

a. データの入力 印刷 訂正

b. 配列要素をすべて0にする
c. 単位行列を作る
d. 行列をスカラー倍する
e. 3行3列の行列の値を求める
f. 行列要素をほかの行列に複写する
g. 2つの行列の加算をする
h. 2つの行列の減算をする
i. 2つの行列の乗算をする
j. 転置行列を求める
k. 逆行列を求める

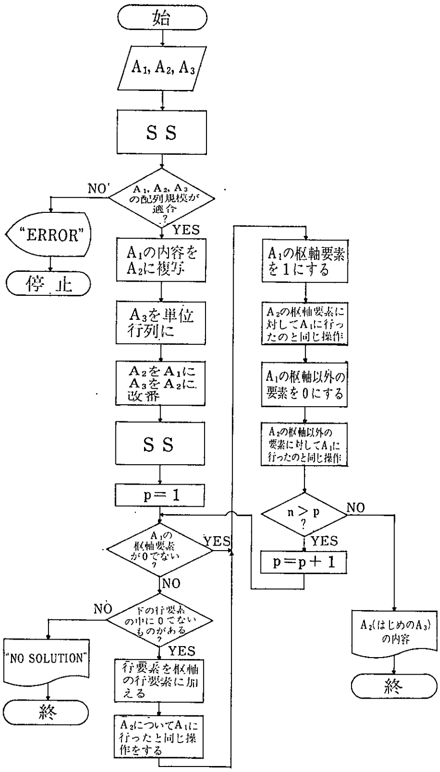
これらを第2表に示す.



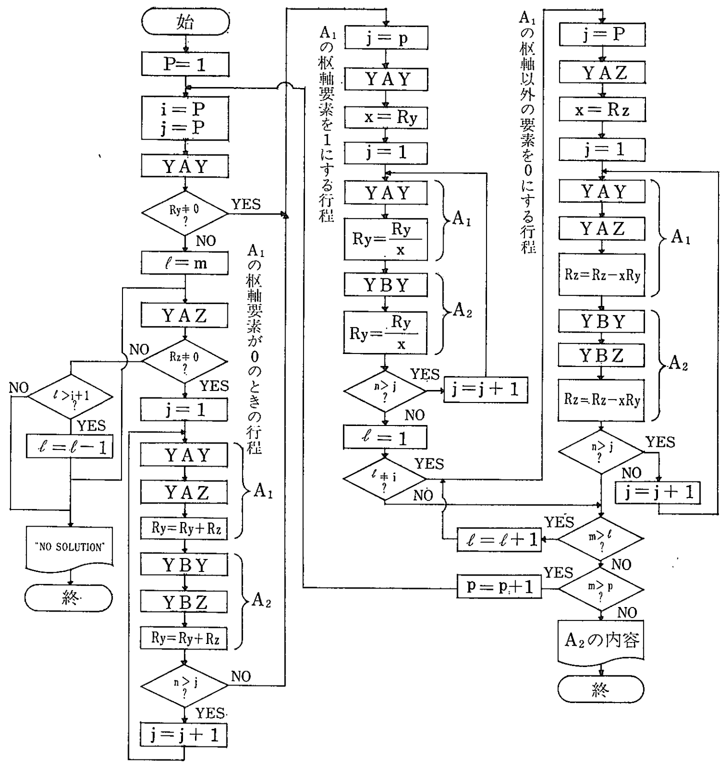
第5図
行列の乗算をするプログラム
(a) 流 れ 図
この計算では 関係する3個の配列に対する計数器 i j l の回し方に注意を要する.

```
JOB=
         775071
ARY=,DIM=
            101
          2.003

              1
       1.000000
       4.000000

              2
       2.000000
       5.000000

              3
       3.000000
       6.000000


JOB=
         775071
ARY=,DIM=
            201
          3.002

              1
       1.000000
       3.000000
       5.000000

              2
       2.000000
       4.000000
       6.000000

(A)*(B)+(C)
ARY NO.
            101
            201
            301
JOB=
         775071
ARY=,DIM=
            301
          2.002

              1
      22.000000
      49.000000

              2
      28.000000
      64.000000
```

(b) 計 算 例
上段が配列101 (配列規模2行3列) 中段が同201 (同3行2列) 下段はその積で 同301 (同2行2列) を示す. 乗算の場合は 配列規模の組み合わせに注意を要する. 配列番号は3者が互いに異なっていなければならない.



(a)



(b)

第6図 (a) (b) (c) 逆行列を求めるプログラム

```
JOB=
            775071
ARY=,DIM=
               501
             4.004

                 1
          1.000000
          0.000000
          1.000000
          1.000000

                 2
          1.000000
          1.000000
          0.000000
          1.000000

                 3
          1.000000
          1.000000
          1.000000
          0.000000

                 4
          1.000000
          1.000000
          1.000000
          1.000000

INV(A)
ARY NO.
               501
               502
               503

JOB=
            775071
ARY=,DIM=
               503
             4.004

                 1
          1.000000
          1.000000
          1.000000
         -2.000000

                 2
         -1.000000
          0.000000
          0.000000
          1.000000

                 3
          0.000000
         -1.000000
          0.000000
          1.000000

                 4
          0.000000
          0.000000
         -1.000000
          1.000000
```

(c)

(a) 行程の概略

行列A_1の逆行列を求めるには A_1と同じ配列規模をもつA_2とA_3を用意する必要がある. このプログラムではA_1の内容を保護するために A_2に複写しておく. 一方 A_3 は単位行列にして その上で A_2 A_3を A_1 A_2にそれぞれ改番する.

計算は消去法で行なわれる. この計算はA_1の要素に対して行なわれる操作をA_2に対してもほどこすのが特色である.

(b) 逆行列計算の流れ図

消去法による計算では A_1の枢軸要素をすべて1にそれ以外の要素を 0にするような操作を行なう.

A_1 の枢軸要素が0のときは 不条理演算となるのでその下の行から0でないものをさがし その行要素を枢軸の行要素に加えて0でなくする.

A_1に対して行なった操作を A_2にも連動して行なう. その結果 A_2にはA_1の逆行列が求まり A_1は単位行列となる.

(c) 計算例

上段が 逆行列を求めようとする配列（配列番号501）

下段が その結果（同503）.

以上の中から具体例として 行列の乗算と逆行列を求める場合について つぎに述べる.

行列の乗算を行なう行程を第5図(a)に示す. この計算には A_1 A_2 A_3 の3個の配列を必要とする. それぞれの配列の間には A_1 の列数$=A_2$ の行数 A_1 の行数$=A_3$ の行数 および A_2 の列数$=A_3$ の列数という関係がなければならない. 配列番号も互いに異なっていなければならない. 配列番号が指定されたら SS サブルーチンを実行して 配列用サブルーチンを設定する. 配列用サブルーチンは A_1 に YAY A_2 に YBX A_3 に YC＊Y が使われる. YBX と YC＊Y は YAY と組合わせて第5図(a)に示すような i j l の各ループ計算をするとき 行列の乗算ができるように式の形が定めてある（第1表).

行列の乗算の計算例を第5図(b)に示す. ここでは配列番号101と201の積を求めてみる. これらを

$$101\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix} \qquad 201\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix}$$

とする. やり方に従って $A_1=101$ $A_2=201$ とし 計算結果を入れる配列を $A_3=301$ とすると

$$301\begin{vmatrix}22 & 28\\ 49 & 64\end{vmatrix}$$

が得られる.

つぎに逆行列を求める計算について述べる． その行程の概略を第6図(a)に示す． 逆行列を求めようとする配列を A_1 に入れる． このほかに A_1 と同じ配列規模をもつ2つの配列 A_2 A_3 を指定する必要がある．

筆者が作ったプログラムでは A_1 の内容を保護するために それを A_2 に複写しておく． A_3は単位行列にする． その上で A_2 と A_3 をそれぞれ A_1 と A_2 に改番するのである． もし A_1 の内容を保護する必要がなければ A_1 と A_2 に同じ配列番号を指定してよい．

計算は消去法で行なわれる． その行程を第6図(b)に示す． 消去法による逆行列の計算は A_1の要素に対する操作と同じ事を A_2 にもほどこすのが特色である． 配列用サブルーチンは A_1 に YAY と YAZ A_2 に YBY と YBZ のそれぞれ2組が使われる． 計算例を第6図(c)に示す． ここでは配列番号 501 の行列

$$501 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

の逆行列を求めてみる． 配列番号を $A_1=501$ $A_2=502$ $A_3=503$ と指定した上で 計算を実行すると その結果は

$$503 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

となり これが 配列番号501の逆行列である．

ところで 行列計算の場合 配列の規模やその組み合わせに数学的な条件が付けられる． たとえば 行列の積を求める場合 A_1 A_2 A_3 の行数と列数の間には計算例のところで述べた一定の制約があるし 逆行列を求める行列は正方行列に限られる． したがって配列番号を指定するときも これらの関係に適合した配列規模のものを選ばなければならない． もし誤った配列の指定をすると 正しい計算結果が得られないばかりか ほかの配列の内容を破壊する事にもなりかねない．

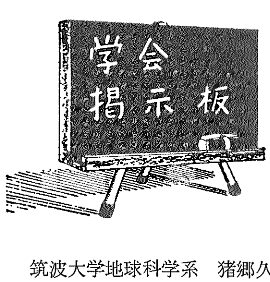
そこで筆者は 配列番号が指定されてから計算に入るまでのステップで その配列の規模や組み合わせが これから行なわれる計算に適合しているかどうかをチェックするようにしている． もしその必要条件を満足していなければ ただちに計算を停止してエラーの表示をする． エラーの種類にはつぎのようなものを考えた．

1. 宣言されていない配列番号が指定された．
2. 計算に必要な個数の配列が指定されなかった（例：行列の乗算や逆行列で A_3 の指定が抜けた場合）．
3. 正方行列でなければならないのに それ以外の配列規模のものが指定された（例：逆行列の計算で3行2列の配列を指定した場合）．
4. 配列規模の組み合わせが不適当（例：行列の乗算で 3個とも4行3列の配列を指定した場合）．

これらのチェックを行なうサブルーチンを作っておけば配列番号の指定を誤っても安全である．

今回は 配列宣言のできない計算機での行列計算の方法を考えてみた． このシステムは筆者自身も前回に述べた配列を1個だけ扱う計算システムほどには使いこなしておらず 実用面ではまだ改良の余地は十分にあると思う． それらは具体的な個々のプログラムの状況をみながら 今後研究してゆきたい．

さて 次回からはこれらの考え方をも取り入れた具体的なプログラムのご紹介に移りたい．（つづく）



・日本古生物学会
1. 昭和52年10月16日（日）
2. 日本古生物学会120回例会
3. 熊本大学理学部 熊本市黒髪町2—39—1
4. 日本古生物学会
5. 茨城県新治郡桜村妻木字天久保
筑波大学地球科学系 猪郷久義 ☎(0298)57—4511

・International Geological Correlation Program: Circum-Pacific-Plutonism Project (IGCP-CPPP)
1. 昭和52年8月20日(土)～26日(金) 野外巡検
27日(土)～28日(日) 学術討論会
2. The 7th Meeting of the Circum-Pacific-Plutonism-Project
3. 野外巡検 — 中部日本
学術討論会 — 富山大学
4. IGCP—CPPP 国内委員会
5. 〒213 川崎市高津区久本135 ☎(044)866-3171
地質調査所地質部 野沢 保

・日本岩石鉱物特殊技術研究会
1. 昭和52年10月25日(火)～27日(木)
2. 第20回研究発表会（金属 非金属 構造地質 耐火物等の薄片 研磨片の作成に関する講演会）
3. 工業技術院地質調査所（川崎市高津区久本135）
4. 日本岩石鉱物特殊技術研究会
5. 神奈川県川崎市高津区久本135 地質調査所内
日本岩石鉱物特殊技術研究会 ☎(044)866—3171(内線211)

〔注〕1. 開催年月 2. 会合名 3. 会場 4. 主催者
5. 連絡先（掲載順位は原稿到着順）