地質調査所月報，第46巻 第11号，p.605-627, 1995

X線CT画像中の2次元ネットワークを伝った流れのシュミレーション

中野　司*

NAKANO Tsukasa (1995) Numerical flow simulation through a two-dimensional network using X-ray CT imagery. *Bull. Geol. Surv. Japan*, vol.46(11), p.605-627, 5 figs., 2 tables.

Abstract: A method named "network flow analysis" has been developed. This method allows study of the bulk electric and fluid flow properties of a rock by simulating flow through the network of cracks and grain boundaries observed in X-ray CT images. Two independent flow simulation methods are considered in the analysis: (1) flow simulation using the "pore-channel model", and (2) flow simulation using an ordinary finite difference method. Both methods use the network structure derived from X-ray CT images to develop the boundary conditions of the flow channels. The macroscopic conductance for electric current and viscous flow were calculated by applying these simulation methods to X-ray CT images of rock samples.

要　旨

X線CT画像として与えられた岩石中の割れ目や粒界などのネットワークを伝った電流および流体の流れをシュミレートし，ネットワーク全体の巨視的な流れを特徴づける物性値（bulk flow properties）を求めるための解析法を開発した．この解析法（ネットワーク解析；network flow analysis）では，流れのシュミレーションを2つの独立な手法を用いて行うことができる：(1)画像中のネットワークをなす領域からポア（溜まり）とチャンネル（流路）の領域を自動的に識別し，それらのつながりと形状による抵抗値をもとにしてネットワークを伝った流れの様子を計算する，(2)画像中のネットワークをなす領域において，流れを支配する微分方程式を差分化して解く．さらに前者の手法では，有効媒質近似を用いてチャンネルの形状抵抗の分布からネットワーク全体の有効な抵抗値を算出することもできる．実際のサンプルの画像にこれらの手法を適用して，そのサンプルの2次元断面のネットワークを伝った電流と粘性流に対する巨視的な伝導度を求めた．これらの結果を比較・検討し，各々の手法の特徴について議論した．

1. はじめに

岩石中の割れ目や粒界を伝った流体（マグマ）の流れは，地表で見られる火山活動の素過程として重要である．それは熱的・物質的な輸送現象（たとえば，McKenzie, 1984；Ribe, 1987）ばかりでなく，より広範囲に渡って岩石全体としての粘弾性的な性質や電気伝導度を左右するため，地殻の強度や上部マントルでの地震学的・地球電磁気学的な不均一性の一因ともなっている（たとえば，O'Connel and Budiansky, 1977；Mavko, 1980；Shankland and Waff, 1977）．それゆえ，地表で得られる地球科学的な観測結果を詳細に解釈するためにも，様々な物理条件下での岩石中での流体の挙動を明らかにする必要がある．

＊地質情報センター

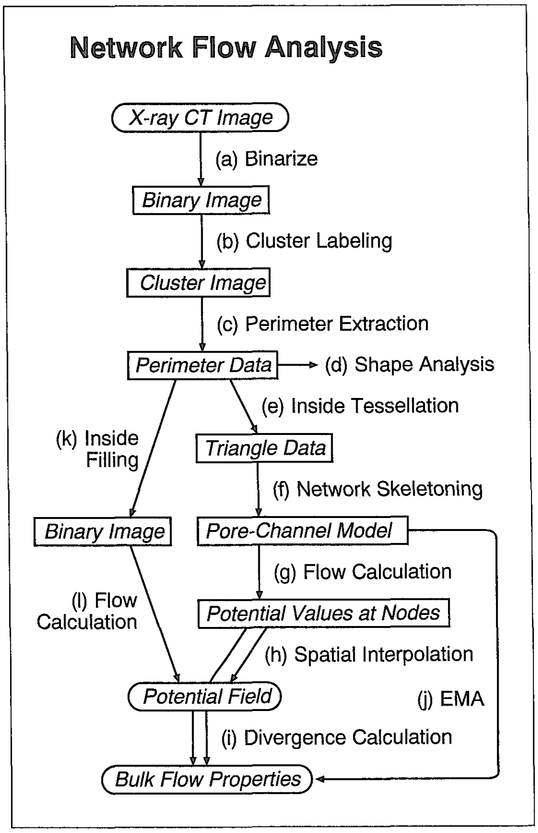
Keywords : network flow analysis, bulk flow properties, X-ray CT image, crack, grain boundary

岩石中でのマグマなどの流体の挙動は，浸透率や岩石全体としての巨視的な電気伝導度などの流れに対する巨視的な物性値（bulk flow properties）によって特徴づけられる．これらは地下の物理･化学的条件に対応して様々な値をとると考えられるが，部分溶融した岩石の場合にそれを実験などによって直接的に測定することはサンプルサイズの制約や実験条件のコントロールなどを考えると非常に困難である．むしろ，実験などで一度部分溶融させたサンプルをもとにして，計算機上で岩石中でのマグマの挙動をシュミレートすることによって求める方が実際的であると考えられる（中野，1991）．すなわち，岩石中の流体の挙動を支配する２つの要因(1)粘性率などの流体そのものの性質，および(2)岩石内部の割れ目や粒界のなす流れの流路のネットワークのつながりや形状（Nakano and Fujii，1989），を実際のサンプルから求めて，それを用いて計算機上でマグマの流れのシュミレーションを行うことが有用である．これらの要因のうち，前者は，これまでに行われた多くの測定結果や理論的な考察（たとえば，久城，1978）から様々な物理・化学条件下での値を求めることができる．また，後者については，X線CT（中野ほか，1992；Nakano *et al.*，1992）を用いれば，実験などで得られたサンプルから非破壊で３次元的な流路のネットワークの形状を求めることが可能である．

以上の解析手法はマグマに限らず，岩石中での水などの流体の流れに関連する巨視的な物性値を推定することに用いることができる．われわれはこの解析手法を，ネットワーク解析（network flow analysis）と呼んでいる（中野，1991；中野･藤井，1991a，1991b，1991c；中野 1992）．本文では，２次元のX線CT画像を用いたネットワーク解析の処理内容について説明する．そして，ネットワーク解析の３つの手法を用いて実際の岩石サンプル中の流体の流れに関連する巨視的な物性値を推定し，それらの比較・検討を行う．

２．ネットワーク解析とポア・チャンネルモデル

ネットワーク解析の処理の概略を第１図に，そして，実際に行った解析の例として，その処理過程の様子を第２図に示した．また，解析を行う際に使用したソフトウェアの一覧を第１表に示した（なお，これらのソフトウェアについては付録Aで概説されている）．これらに示されているように，ネットワーク解析は多数の処理内容に分割されている．以下では，それら各々について説明する．

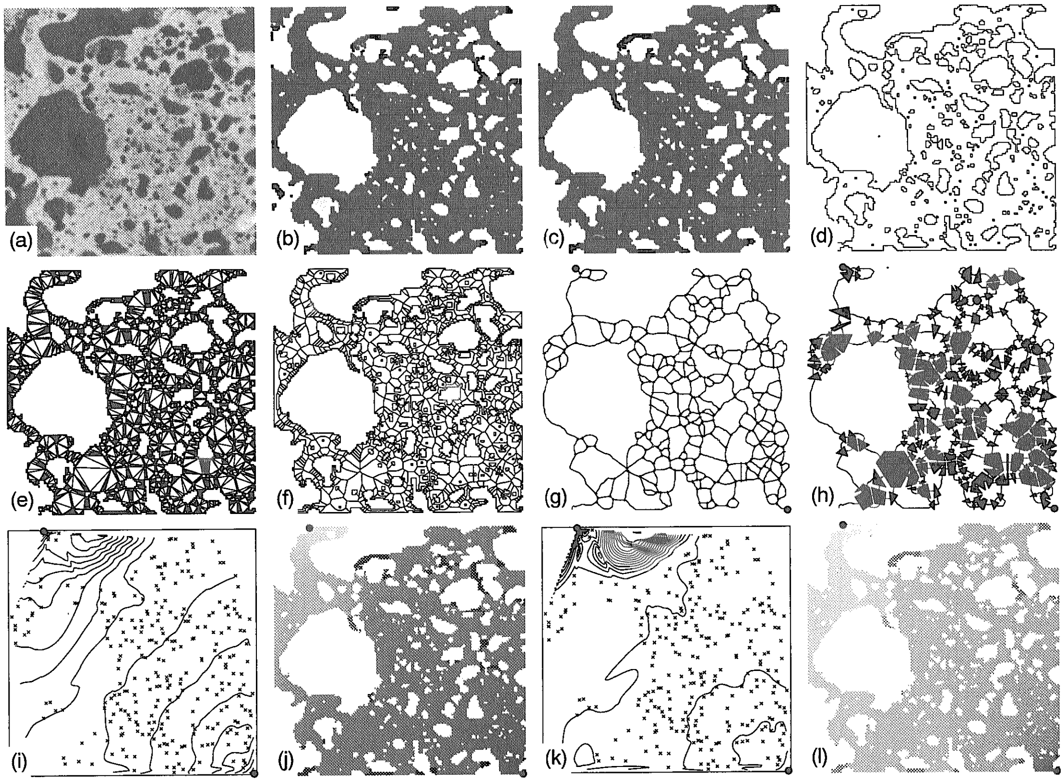


第１図　ネットワーク解析のフローチャート．
Fig.1　Flow chart of the network flow analysis.

2.1　ネットワーク解析の前処理

ネットワーク解析では，前処理として，与えられた画像からネットワークをなしている領域を抽出するための処理を行う．そのために，まず，与えられた画像の輝度値を０と１に２値化する（第１図の(a)の処理）．与えられた画像がX線CT画像の場合（第２(a)図）には，ネットワークをなしている領域（たとえば，割れ目や空隙の部分）とそうでない部分（岩石の部分）の密度の違いを考慮して適当な輝度値（CT値）を指定し，それを境に単純な２値化を行う．また，適当な空間フィルタ（たとえば，ラプラシアンフィルタ）を与えられた画像に施した結果を２値化してもよい．

このようにして得られた２値画像（たとえば，第２(b)図）には，通常は多数のクラスタが含まれる．ここで，クラスタとは，２値画像中の輝度値１（もしくは０）の画素のひとつながりのかたまりである（クラスタとして輝度値１の画素のものと０のものが考えられるが，以下



第２図　ネットワーク解析の処理過程の例．(a)X線CT画像．サンプルは焼結鉄鉱石で，白い部分が固体，黒い部分が気孔である．ここでは(物理的な意味を考えずに)，例として固体領域のネットワークに注目する．(b)輝度値を２値化した画像．(c)最大サイズのクラスタ．(d)最大サイズのクラスタの輪郭線．(e)ネットワークの領域を分割した三角形．(f)ネットワークの領域を分割した三角形の外心を結んだスケルトン．(g)ネットワークを伝った流れに関係しない枝を取り去ったスケルトン．(h)ネットワークのポア領域に相当する三角形．(i)ポア・チャンネル (PC) モデルを用いて計算したネットワークに電流が流れた場合の電位分布．(j)電流に対する有限要素近似によるシュミレーションから得られた電位分布．(k) PCモデルを用いて計算したネットワークに粘性流体が流れた場合の圧力分布．(l)粘性流に対する有限要素近似によるシュミレーションから得られた圧力分布．

Fig.2　Examples of the network flow analysis. (a) X-ray CT image. Sample shown in the image is a sintered iron ore (the white region is the solid and the black is the void). We consider the network of the solid region as an example. (b) Binary image. (c) The largest cluster. (d) Perimeter of the largest cluster. (e) Triangle tessellation of the network area. (f) Skeleton connecting the outer centers of the tessellated triangles. (g) Skeleton without the branchs where fluid flow does not occur. (h) Triangles correspond to the pore areas. (i) Potential distribution due to the electric current in the network area calculated by the pore-channel (PC) model. (j) Potential distribution due to the electric current in the network area calculated by the finite difference model. (k) Pressure distribution due to the viscous flow in the network area calculated by the PC model. (l) Pressure distribution due to the viscous flow in the network area calculated by the finite difference model. Closed circles show the entry or exit points of the flows.

ではどちらか一方だけを考える)．このようなクラスタを識別し，各画素にそれが属するクラスタの名前（クラスタ番号）を輝度値として与えた画像（クラスタ画像）を作成する．この処理をクラスタラベリングと言う（第１図(b)の処理）．

ネットワーク解析では，通常は画像中のネットワークとして，クラスタラベリングで識別した最大サイズのクラスタだけを考慮する．そこで，ネットワーク解析の前処理の最後として，最大サイズのクラスタ（第２(c)図）の輪郭線を取り出す(第１図(c)の処理；第２(d)図)．ただし，ネットワーク状のクラスタでは内部に穴が開いていることが普通なので，それらを取り囲むものを含めた複

第1表　ネットワーク解析のためのソフトウェア一覧.
Table 1. List of software used in the network flow analysis.

ソフトウェア名	機能	備考 **
bmhist	画像データの輝度の出現頻度分布を調べる。	a *3
gfit など	画像データの輝度の出現頻度分布を Gaussian 関数などでフィットし、そのピークサーチを行なう。	a
bmbin	指定した輝度の閾値で画像データの二値化を行なう。	a *3
exgrain	画像データ中の 0 以外の輝度の画素のつながり（クラスタ）を識別し、各クラスタにサイズ順の名前（番号）をつける。	b *3
exedge	exgrain で識別したすべてのクラスタの輪郭線を抽出する。	c *3
exprmt	exedge で抽出した輪郭線のうち指定したクラスタのものだけを取り出す。	c *3
fdfl など	exprmt で得た輪郭線データからクラスタの形状のフラクタル次元などを求める。	d *1
tricut、tc2	exprmt で得た輪郭線データを用いて、クラスタ内部の三角形分割を行なう。	e *4
prune	tricut などで得たクラスタ内部の三角形分割データからネットワークの骨格（スケルトン）を求め、さらにポアとチャンネル領域を識別してそれらの幾何学的な情報を計算する。	f *5
pcnec（pcvfc）	prune で得たネットワークの情報を用いて、各チャンネルに電流（もしくは粘性流体）が流れる際の形状抵抗の値を計算する。	g *5
netsolve	pcnec などで計算した各チャンネルの形状抵抗の値を用いて、 prune で得たネットワークの２点にポテンシャル（電位もしくは圧力）差が与えられた場合の電流もしくは粘性流を求める。具体的には、各ポアでのポテンシャル値と各チャンネルの流量をキルヒホッフの法則から計算する。	g *5
triangle + agrid2 など	netsolve で得たネットワークのポアでのポテンシャル値を２次元補間して、系全体のポテンシャル場の分布を計算する。	h *2
netdiv	netsolve で得た結果から、ネットワークを伝った電流もしくは粘性流の指定したポアでの流れのわきだし量を計算する。	i *5
ema	pcnec などで計算したチャンネルの形状抵抗値の分布から、有効媒質近似（EMA）を用いてネットワーク全体の電流や粘性流に対する有効な抵抗値を計算する。	j *6
prmt2bm	exprmt で得られるものと同じ形式の輪郭線データから、それが取り囲むクラスタ内部を塗りつぶした二値画像データを得る。	k *7
bm2p（bm2puv）	画像データから境界条件を与えた系について差分方程式を解いて電流（もしくは粘性流）のシュミレーションを行なうために、二値画像データの各画素（セル）の状態などを調べる。	l *7
p（puv）など	差分方程式を解いて電流（もしくは粘性流）のシュミレーションを行なう。	l *7
p2div（puv2div）	差分方程式を解いた電流（もしくは粘性流）のシュミレーション結果から、指定したセルでの流れのわきだし量を計算する。	i *7

備考 **：第１図のフローチャートの対応する処理（a ～ l）および参照文献（*1 ～ *7）。
参照文献：*1 藤井・中野(1988)、*2 中野・藤井(1989b、1989c)、*3 中野・藤井(1991a)、*4 中野・藤井(1991b)、*5 中野・藤井(1991c)、*6 中野(1992)、*7 本文。

数の輪郭線を区別して取り出すことが必要である．これは，具体的には，クラスタの外側を取り囲む輪郭線と内側の輪郭線をその周回方向（時計まわり・反時計まわり）で区別できるように輪郭線の追跡・抽出を行っている．

ネットワークを伝った流れの解析を行うこと以外に，ここで求めたクラスタの輪郭線データを用いればその形状の解析を行うこともできる(第１図(d)の処理)．これは，たとえば，クラスタの形状の楕円近似やその結果得られる主軸方向の解析，輪郭線のフーリエ解析による多角形近似，そして，クラスタ形状のフラクタル次元（高安，1986）の算出などである（たとえば，藤井・中野，1988）．

以上の処理内容（特に，クラスタに属する画素のつながり方の定義やクラスタラベリングの手法，そして，輪郭線データの取り出し方など）については中野ほか(1988)および中野・藤井（1989a，1991a）で説明されているので，詳細はそちらを参照していただきたい．

2.2　ポア・チャンネルモデルの構築

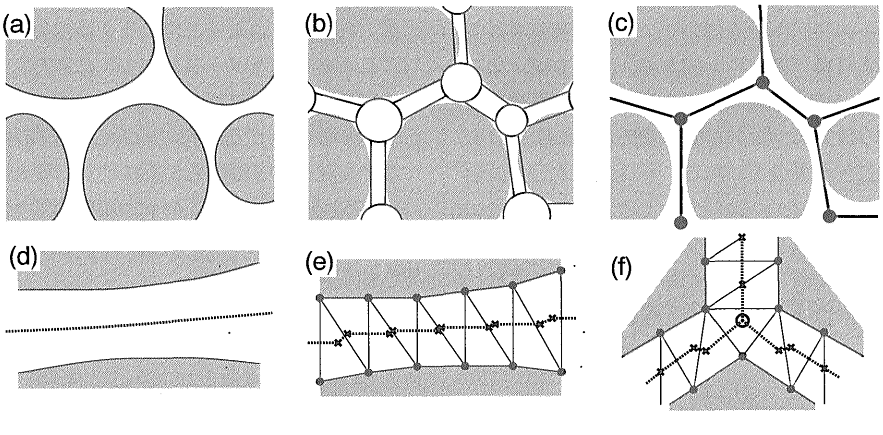
上で得られた画像中の最大サイズのクラスタ（ネットワーク）を伝った電流や粘性流の流れのシュミレーションを考える．ネットワーク解析ではそのためにふたつの手法が用意されている．

第１の手法は，ネットワークの領域を微小な有限要素（セル）に分割して，流体の流れを支配する微分方程式を差分化して解くものである．これについては，後で詳しく述べる．第２の手法は，ネットワークの領域をポア（溜まり）とチャンネル（流路）の部分に分割したモデル（第３(b)図）で近似し，それを用いて流体の流れを計算する．クラスタの輪郭線データからこのモデル(ポア・チャンネルモデル；略してPCモデル)を構築する方法について以下で説明する．

今，第３(a)図のようなネットワークを考える．これに対するPCモデルは，概念的には第３(b)図のようなものになる．ここで，同図の丸い部分がポアで，それらを結ぶ部分がチャンネルである．ただし，これらの形状（ポアの半径やチャンネルの長さおよび幅）は，できるだけもとのネットワークの特徴を活かすように設定する．このモデルを用いて，ネットワークを伝った流体の流れをシュミレートする場合は，電気回路とのアナロジーが有用である．すなわち，ポアをコンデンサー，チャンネルを抵抗と見なして，それらの抵抗値などの属性をチャンネルの形状(長さや幅)などから計算する．そして，PCモデルに対応するこれらの素子のつながった電気回路（第３(c)図）について，電流（もしくは粘性流など）を計算すればよい．このように，電気回路とのアナロジーでネットワークを伝った流れをシュミレートするためには，ネットワークのつながりの情報とチャンネルの長さなどの幾何学的情報をどちらも残したPCモデルをネットワークの輪郭線データから構築する必要がある．

ところで，先の電気回路の抵抗を示す線からなる図形（第３(c)図），すなわちネットワークの軸線(骨格線；スケルトン)を画像から求めることは，スケルトニング(細線化）と呼ばれている．ネットワークの軸線は，そのつながりの様子を知る上で有用である．ただし，これまで発表されているスケルトニングの方法(たとえば,Stauffer, 1985)では，PCモデルで必要とされる幾何学的な情報を捨て去ってしまっている．ネットワーク解析では，以下のような手法でPCモデル構築のための情報を残したスケルトニングを行っている．

スケルトニングの原理について考える．第３(d)図のよ



第３図　PCモデルの構築のための概念図．
Fig.3　Schematic figures showing the procedures to construct the PC model.

うなネットワークのチャンネルが与えられた場合に，われわれはこれから同図の点線のような軸線を即座に引くことができる．この操作を分析すると，チャンネル（ネットワーク）の軸線とはそれを取り囲む輪郭線から等距離の点を結んだもの，と定義できる．これは物理的にも意味があって，軸線はチャンネルを粘性流体が流れる場合の流速最大の点を結んだ流線に一致する．ところで，ネットワーク解析で取り扱う輪郭線は，多数の点を結んだデジタルな折れ線である(第3(e)図)．それで，上の定義を変えて，ネットワークの軸線を向かい合った輪郭線上の点の間の垂直2等分線を結んだもの，とする．すると，このようにして得た軸線は，第3(e)図のようにネットワーク領域の内部を適当な方法で三角形に分割して，その外心（三角形の各辺の垂直2等分線の交点；第3(e)図の×印）を結んだものと等価である．このようなネットワーク領域の三角形分割(第1図(e)の処理；第2(e)図)は，ボロノイ分割（室田，1986）に基礎を置く手法によって一意的に行うことができる（中野・藤井，1991b)．

PCモデルの構築の際にネットワーク領域の三角形分割によってスケルトニングを行う（第1図(f)の処理）と，以下の2つの利点がある．まず第1の利点は，ネットワーク領域からポアとチャンネルを客観的に識別できることである．すなわち，各三角形の外心で交わる軸線の本数（配位数）を調べてそれが3以上である（たとえば，第3(f)図の白丸）場合には，その外心に対応する三角形をポアであると考える（ただし，配位数3の外心が隣り合っている場合には，それらに対応する三角形を融合した多角形をポアの領域と見なし，また，そこに適当な配位数を持つ新たな軸線の交点を計算する必要がある)．また，2つのポアにはさまれたひと続きの三角形をチャンネルと見なすことができる．第2の利点は，これらのポアやチャンネルの幾何学的な情報を，それを構成する三角形の情報から計算できることである．たとえば，あるチャンネルの幅 w は，それを構成する三角形の面積の和 S とその両端のポアにつながる軸線の長さの和 l(これをチャンネルの長さと見なす）から，

$$w=S/l \quad \cdots\cdots(1)$$

として近似することができる（これよりも詳細なチャンネルの幅の計算も可能だが，以下では(1)式の近似を用いることにする)．

2.3 ポア･チャンネルモデルを用いた流れのシュミレーション

先にも述べたように，画像中のネットワーク領域のPCモデルが構築できれば，チャンネルの形状抵抗などを計算した後に電気回路とのアナロジーを用いて，ネットワークを伝った電流や粘性流などの流れのシュミレーションを行うことができる（中野・藤井，1991c)．

ところで，このような流れのシュミレーションを行う場合に，電気回路のつながりを表すスケルトンとしてネットワークを三角形分割した外心を結んだものをそのまま用いると計算の際に無駄が多い．すなわち，第2(e)図の三角形の外心を結んだ第2(f)図のスケルトンを見れば明らかなように，これには流れの起こりえない末端の枝が多数存在する．これらの枝は，ここで行ったスケルトニングがネットワークの輪郭線の局所的な凹凸を忠実に反映しているために生じるものである．そこで，第2(g)図のように，流れに関係しないネットワークの末端の枝（三角形）を刈り取る処理を行う．ただし，その際に，ネットワークから外部へ流体が流出，もしくは，外部からネットワークに流体が流入する点（外心もしくは三角形；第2(g)図の黒丸）を与えて，それらにつながった末端の枝だけは刈り取らないようにする（これらの流体の流入・流出点はネットワーク領域のどこにいくつあってもよいわけだが，ネットワーク解析では，通常はネットワーク領域上の最も離れた2点を自動的に流入・流出点として選ぶようにしている)．

不必要な枝を刈り取ったネットワーク（PCモデル）を使って電流と粘性流のシュミレーションを行う．その際に，流れは時間的な変化をしない（定常である）と考える．すなわち，先の電気回路とのアナロジーで言えば，ポアに相当するコンデンサーは電荷に飽和していて電流に何の影響も及ぼさないとする．このため，ポアを空間的な広がりがないチャンネルのつなぎ目の点であると見なす(以下では，それを節点もしくはノードと呼ぶ)．そして，外部からのネットワークへの流体の流入・流出点（これらも特別なノードとする）にポテンシャル（電位もしくは圧力）差を与えて，各チャンネルを伝った流量とすべてのノードでのポテンシャルの値を計算する．

ポテンシャル（電位もしくは圧力）値 P_i を持つノード i とポテンシャル値 P_j のノード j の間のチャンネルを伝った電流および粘性流の流量 $q_{i,j}$ は，どちらも以下の式で計算される．

$$q_{i,j}=-a\cdot b\cdot c_{i,j}\cdot(P_i-P_j) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで，a と b はネットワークのすべてのチャンネルに共通なチャンネルの形状に依存しない定数で，前者は流体の流れやすさを示す物性値(電気伝導度 σ や粘性係数 μ；これらはネットワークを流れる流体中で一様であると仮

定する）に関連したものを，後者はそうでないものを表している．具体的には，これらは，

$$a=\begin{cases}\sigma & \text{（電流の場合）}\\ 1/\mu & \text{（粘性流の場合）}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$b=\begin{cases}1 & \text{（電流の場合）}\\ 1/12 & \text{（粘性流の場合）}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となる．ただし，粘性流に対する a および b は，低レイノルズ数の放物型速度プロファイルの流れを仮定した場合の値である（この詳細は，たとえば Landau and Lifsitz（1970）などの流体力学の教科書を参照のこと）．流れの計算終了後にこれらの定数分の補正は容易にできるので，ネットワーク解析では $a=1$ かつ $b=1$ であると仮定している．

(2)式の係数 $c_{i,j}$ がノード i と j の間のチャンネルの形状（軸線の長さ l と(1)式で求められた幅 w）に関係した伝導度（抵抗値の逆数）である．ネットワーク解析では，これらは以下のような値を取るとする．

$$c_{i,j}=\begin{cases}w\,/\,l & \text{（電流の場合）}\\ w^3/l & \text{（粘性流の場合）}\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ただし，ここでも，粘性流に対しては低レイノルズ数の放物型速度プロファイルの流れを仮定している．

外部からの流入・流出口を除いて，ネットワークを伝った流体の流れは流量の保存則（キルヒホッフの法則）に従っている．すなわち，流入・流出口以外のノード i では，

$$\sum_j q_{i,j}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

が成り立っている．ただし，(6)式のノード j として，ノード i と隣り合ったものだけの和をとる．

流出・流入口に与えたポテンシャルの値と(2)および(6)式を連立して解けば，すべてのノードでのポテンシャル値が計算できる（第1図(g)の処理）．そして，ノードの位置で得られたポテンシャルの値を空間補間（たとえば，中野・藤井，1989b）すれば，ネットワークを伝った流れによる系全体のポテンシャル（電位および圧力）場の様子を可視化できる（第1図(h)の処理）．第2(i)図と第2(k)図は，このようにして計算したネットワークを伝った電流および粘性流で生じた電位および圧力の場を示している．ただし，ポテンシャル分布を示す等高線（中野・藤井，1989c）は，外部からのネットワークへの流体の流入・流出口に与えたポテンシャル差の1/20ごとに描いてある．これらの図から，ネットワークの幅が狭くなっている画像の左上の部分ではポテンシャルの値が急変している（すなわち，この部分はネットワークを伝った流れのボトルネックである）ことが明らかである．

以上のようなシュミレーションの結果得られた流体の外部からのネットワークへの流入・流出量は，流れに対するネットワーク全体としての巨視的な伝導度の目安となる．さらに，それ以外にも，流体の流入量・流出量は，ノードでのポテンシャル値の計算の精度を評価するために利用できる（精度よく計算できれば，流入量と流出量の絶対値は同じ値になるはずである）．ネットワーク解析では，処理の最後にこのような流入口・流出口での流量（わきだし量）を計算している（第1図(i)の処理）．

2.4　有効媒質近似

電流や粘性流の流れに対するネットワーク全体の巨視的な伝導度を PC モデルを用いて評価するとき，上で行ったキルヒホッフの法則（(6)式）を直接解く方法には以下のような3つの問題点がある．まず，第1の問題点は，計算量もしくは計算精度の問題である．巨大な画像に対してネットワーク解析を行った場合，ノードの個数が非常に多くなるため，キルヒホッフの法則から導かれる多数の連立方程式を解いて流れを計算しなければならない．この連立方程式は，ネットワークのつながりを反映した複雑な係数の配置をしているので，大規模連立方程式を解く際に用いられる様々な手法（たとえば，Buneman, 1969）を利用することができない．それゆえ，多数のノードを持つネットワークに対しては緩和法などで連立方程式を解くことになるため，ノードでのポテンシャル値を高精度に求めることが困難になる．第2の問題点は，ネットワークへの流体の流入・流出口の位置や個数の設定の仕方に，それらを用いて計算した巨視的な伝導度が大きく依存することである．このため，流入・流出口を様々に設定したシュミレーションを行った結果を総合して考える必要がある．第3の問題点はより本質的である．ネットワーク解析を行う対象とした画像は，ネットワークを伝った流れの巨視的な伝導度を求めたいサンプルの一部を取り出したものに過ぎない．特に，ネットワークのつながりの具合はネットワークの部分ごとにまちまちであるため，画像からキルヒホッフの法則を用いて得た伝導度がサンプル全体の巨視的伝導度を代表しているという保証はない．

このような問題点（特に第3の問題点）を排除するためには，PC モデルで得られるチャンネルの伝導度 c（(5)式）の分布をサンプル全体の分布 $D(c)$ であると見なして，それを用いて巨視的な伝導度を計算する手法が有効であ

る（ただし，画像サイズ以上の長いチャンネルの伝導度は考慮されないため，こうして推定した$D(c)$では小さな値の伝導度（(5)式参照）に相当する部分が抜け落ちることになる）．ネットワーク解析では，PCモデルで得られるチャンネルの伝導度の分布$D(c)$を用いて，有効媒質近似（Effective medium approximation；略してEMA；Kirkpatrick, 1973)によって流れに対するネットワークの巨視的な伝導度を評価する（第1図(j)の処理）．ネットワークの巨視的伝導度の理論的な取り扱い（たとえば，Shankland and Waff, 1974；Koplik, 1982；Yonezawa and Cohen, 1983；Doyen, 1988）では，これまでしばしばEMAが用いられてきたが，ここでは，それを実際のデータ解析に使用する．

EMAでは，無限に広がったネットワークを考えて，それを構成するチャンネルの伝導度cの分布$D(c)$とノードでのチャンネルの平均配位数zから，すべてのチャンネルが1種類の有効伝導度を持ち，それらのつながりの具合がもとのネットワークと同じである有効なネットワークを推定する．そして，そのネットワークの各チャンネルの有効伝導度c_mは以下の式から算出できる．

$$\int_0^\infty D(c)\cdot dc \frac{c_m - c}{c + (z/2-1)\cdot c_m} = 0 \quad \cdots\cdots(7)$$

また，(5)式を用いてPCモデルから個々のチャンネルの伝導度を計算した場合には，

$$\sum_k \frac{c_m - c_k}{c_k + (z/2-1)\cdot c_m} = 0 \quad \cdots\cdots(8)$$

を解くことになる．ここで，c_kは（(5)式では$c_{i,j}$と表していた）チャンネルkの伝導度である．また，(8)式ではすべてのチャンネルkについての和をとる．なお，上記のEMAの仮定と考え方，(7)および(8)式の導出法や解法などの詳細については中野（1992）を参照していただきたい．

このようにしてEMAで得られた有効伝導度は，ネットワークのつながりの具合に大きく影響されない値となる．言い換えると，同じサンプルの異なった部分を含んだ画像から得たネットワークの有効伝導度は，どれも同じ程度の値になることが予想される．

3．有限要素近似による流れのシュミレーション

先に求めた輪郭線データからネットワーク領域を微小な有限要素（セル）に分割し，それを用いて流体の流れを支配する微分方程式を差分化して解くことを考えよう．これは，流体力学でしばしば行われるオイラー流の空間格子を用いたシュミレーションである．ただし，ネットワーク解析では，流れに大きな影響を及ぼす境界条件を画像データ（輪郭線データ）から自動的に求める点が通常のシュミレーションとは異なっている．

ネットワーク領域を分割するセルとして，もとの画像の画素の空間的広がりと同じものを使用する．ネットワーク領域に相当するセルの配置を輪郭線データから求めるために，ネットワーク解析では，まず，輪郭線内部の領域を塗りつぶした2値画像を作成する（第1図(k)の処理；第2(c)図）．このようにして得られたセルには，以下の3つの状態がある；状態W：ネットワーク領域に属していない壁のセル，状態E：ネットワークに外部から流体が流入・流出するセル，状態F：ネットワーク領域に属する流体のあるセル．ここで，状態Wのセルは2値画像の塗りつぶされていない画素に対応する．また，状態Eのセルは2値画像中でネットワークに属している画素のうちの少なくとも2つで，ネットワーク解析では，PCモデルでキルヒホッフの法則から流れのシュミレーションを行ったときの流体の流入・流出口と同じ位置のものを用いている．

ネットワークを伝った流れとして，PCモデルを用いた場合と同じに定常な電流と粘性流の場合だけを考える．電流の流れを支配する基礎方程式は以下の2つである．

$$\vec{f} = -\sigma\nabla P \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\nabla\cdot\vec{f} = 0 \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，σはPCモデルでも用いた電気伝導度（ネットワーク全体で一様と仮定）である．(9)式は，ネットワーク領域の各点で，電流$\vec{f}$がそこでの電位Pの空間勾配に比例することを意味する．また，(10)式は流量保存（キルヒホッフの法則）を表している．これらの方程式を解く前に，特徴的な流量f_0と長さのスケールL（この値として，たとえば，セルに対応する画素の一辺の長さをとる）を用いて式を無次元化する．すなわち，

$$\vec{f} = f_0\vec{f'},\ P = \frac{f_0 L}{\sigma}P',\ \nabla = \frac{1}{L}\nabla' \quad \cdots\cdots(11)$$

として，(9)および(10)式は以下のようになる．

$$\vec{f'} = -\nabla' P' \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\nabla'\cdot\vec{f'} = 0 \quad \cdots\cdots(13)$$

以下では，これらの無次元方程式を取り扱うものとし，諸量の右肩のプライムは省略する．ところで，(12)式を(13)式に代入すると，

$$\Delta P=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

が得られる．そこで，電流のシュミレーションでは，取り扱いの容易な(14)式（ラプラス方程式）を解くこととし，必要な場合には補助的に(12)と(13)式を考慮する．

次に粘性流の基礎方程式を考える．それは，非圧縮流体に対するナビエ・ストークスの式(流体の運動方程式)，

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)=-\nabla P+\mu\Delta\vec{v} \quad \cdots\cdots(15)$$

および非圧縮（質量保存）の式

$$\nabla\cdot\vec{v}=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

である．ここで，ρ と μ は流体の密度と粘性係数(PC モデルの場合と同様に流体内で一様と仮定)，$\vec{v}$ と P は流速と圧力である．

ネットワーク解析では PC モデルで得られた結果と比較するために，定常な ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0$)，慣性項が無視できる遅い流れ（$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=0$；ストークスの近似）の場合だけを考える．すなわち，(15)式は以下のようになる．

$$-\nabla P+\mu\Delta\vec{v}=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

電流の場合と同様に，(16)と(17)式を特徴的な流速 v_0 と長さのスケール L を用いて無次元化する（実は諸量の無次元化の仕方は以下のものよりもよい方法があるのだが，ここでは通常の流体力学の方法を示す）．すなわち，

$$\vec{v}=v_0\vec{v}',\ P=\rho v_0^2P',\ \nabla=\frac{1}{L}\nabla',\ \Delta=\frac{1}{L^2}\Delta' \quad \cdots\cdots(18)$$

として，(17)と(16)式は以下のようになる．

$$-\mathrm{Re}\nabla'P'+\Delta'\vec{v}'=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

$$\nabla'\cdot\vec{v}'=0 \quad \cdots\cdots(20)$$

ここで，Re はレイノルズ数，

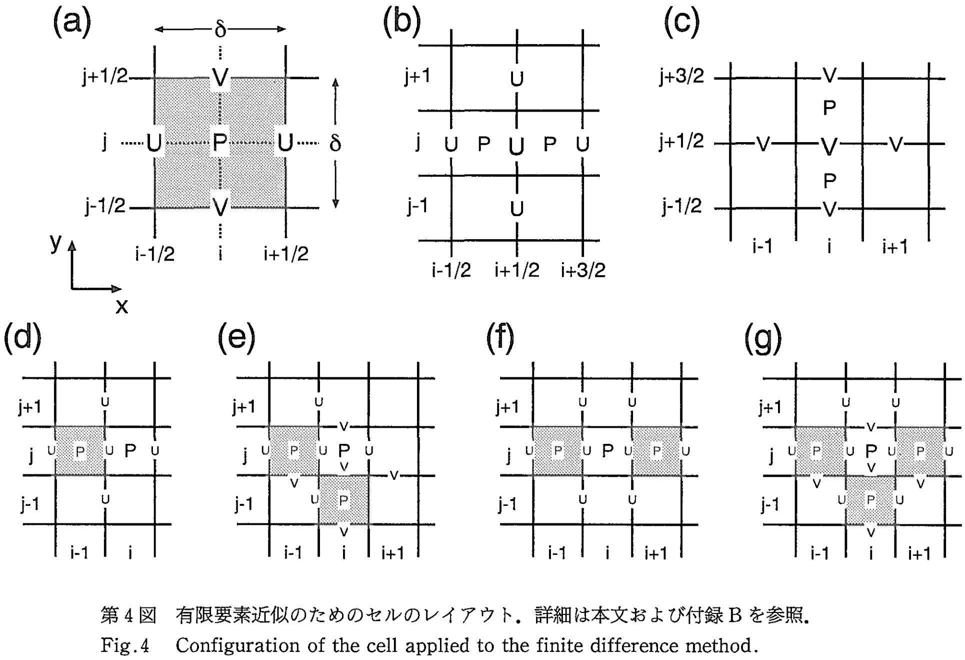
$$\mathrm{Re}=\frac{\rho v_0 L}{\mu} \quad \cdots\cdots(21)$$

である．電流の場合と同様に，以下では(19)および(20)式の諸量の右肩のプライムは省略する．また，(19)と(20)式より，圧力 P に関するラプラス方程式，

$$\Delta P=0 \quad \cdots\cdots(22)$$

が得られるので，粘性流のシュミレーションでもこれを(19)および(20)式とともに用いることにする．

以上で示した方程式を差分化して，ネットワークを伝った流れのシュミレーションを行う（第1図(1)の処理）．その際に，流れ $\vec{f}=(U,\ V)$ および $\vec{v}=(U,\ V)$ と電位および圧力 P の値を異なった格子（くいちがい格子）上の点において計算する(第4(a)図)．すなわち，第4(a)図



第4図　有限要素近似のためのセルのレイアウト．詳細は本文および付録Bを参照．
Fig.4　Configuration of the cell applied to the finite difference method.

に示されているように，P はセルの中心における値を，U と V はセルの辺の中心での値だけを求める．このようなくいちがい格子を用いると，流れを支配する方程式の差分化にともなう誤差をおさえることができる（たとえば，Harlow and Welch, 1965；Welch *et al.*, 1966)．

電流および粘性流に対して解くべき差分方程式を第2表に示した．同表でわかるように，これらの式は計算を行うセルおよびその周囲のセルの状態(W，E および F)によって，異なった形をしている．すなわち，境界条件によって解くべき差分方程式が異なっている．このような差分方程式の導出法は，付録Bで詳しく説明されている．

ネットワークの流入・流出口（状態Eのセル）に P の値を与えて，流体のある（状態Fの）セルについて第2表に示された差分方程式を解くために，単純な緩和法を用いた．ただし，電流の場合は電位 P に対する式（第2(a)表）を解くだけで十分だが，粘性流の場合は圧力 P に対するもの（第2(b)表）と同時に流速 U（第2(c)表）と V（第2(d)表）に対する計算を緩和法の繰り返しループ中で行う必要がある．ところで，緩和法では，計算結果の収束に要する繰り返しの回数は，緩和させる諸量に与える初期値に大きく依存する．そこで，緩和法の収束をよくするために，実際のネットワークのセルに対して計算する前に，それを粗視化して作成したサイズの大きな少数のセルからなるネットワークについて計算を行った．そして，それによって得られた電位や圧力などを実際のサイズのネットワークについての計算の初期値として用いた．

第2(j)図と第2(l)図は，ネットワークに電流および粘性流が流れた場合のシュミレーションの計算結果として得られた，電位および圧力場の様子を示している．ただし，これらの図の黒丸で示したものが，計算に際して電位差もしくは圧力差を与えた，ネットワークの外部から流体が流入・流出する状態Eのセルである．また，同図の濃淡は，状態Eのセルに与えた値でノーマライズした電位もしくは圧力の値を示している．

PCモデルにキルヒホッフの法則を適用して行った場合と同様に，有限要素を用いた流れのシュミレーションでもネットワークに外部から流入・流出する流量は，ネットワークの流れに対する巨視的な伝導度の評価や計算結果の精度の目安となる（特に，緩和法を用いたシュミレーションでは，緩和の収束を判定するために，外部から

第2表　(a)電流をシュミレートするための電位 P に対する差分方程式．
Table 2. (a) Finite difference equations for the potential, P, of 2-dimensional electric current.

フラグ値	セルの状態 (i, j)	$(i-1, j)$	$(i+1, j)$	$(i, j-1)$	$(i, j+1)$	場合の数	$P_{i,j}$ について解くべき式
0	W	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$P_{i,j}$ = undefined
1	F	W	W	W	W	1	
2	F	W	W	W	F/E	2	$P_{i,j} = P_{i,j+1}$
3	F	W	W	F/E	W	2	$P_{i,j} = P_{i,j-1}$
4	F	W	F/E	W	W	2	$P_{i,j} = P_{i+1,j}$
5	F	F/E	W	W	W	2	$P_{i,j} = P_{i-1,j}$
6	F	W	W	F/E	F/E	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i,j-1} + P_{i,j+1})$
7	F	F/E	F/E	W	W	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i-1,j} + P_{i+1,j})$
8	F	W	F/E	W	F/E	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i+1,j} + P_{i,j+1})$
9	F	W	F/E	F/E	W	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i+1,j} + P_{i,j-1})$
10	F	F/E	W	W	F/E	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i-1,j} + P_{i,j+1})$
11	F	F/E	W	F/E	W	4	$P_{i,j} = 1/2\,(P_{i-1,j} + P_{i,j-1})$
12	F	W	F/E	F/E	F/E	8	$P_{i,j} = 1/3\,(P_{i+1,j} + P_{i,j-1} + P_{i,j+1})$
13	F	F/E	W	F/E	F/E	8	$P_{i,j} = 1/3\,(P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + P_{i,j+1})$
14	F	F/E	F/E	W	F/E	8	$P_{i,j} = 1/3\,(P_{i-1,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j+1})$
15	F	F/E	F/E	F/E	W	8	$P_{i,j} = 1/3\,(P_{i-1,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j-1})$
16	F	F/E	F/E	F/E	F/E	16	$P_{i,j} = 1/4\,(P_{i-1,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j-1} + P_{i,j+1})$
17	E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$P_{i,j}$ = given

第2(b)表　粘性流をシュミレートするための圧力Pに対する差分方程式。

Table 2(b)　Finite difference equations for the pressure, P, of 2-dimensional viscous flow.

フラグ値	セルの状態					場合の数	$P_{i,j}$ について解くべき式
	(i,j)	$(i-1,j)$	$(i+1,j)$	$(i,j-1)$	$(i,j+1)$		
0	W	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$P_{i,j}$ = undefined
1	F	W	W	W	W	1	
2	F	W	W	W	F	1	$P_{i,j}=P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j+1}-U_{i+1/2,j+1})$
3	F	W	W	W	E	1	$P_{i,j}=P_{i,j+1}$
4	F	W	W	F	W	1	$P_{i,j}=P_{i,j-1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}-U_{i+1/2,j-1})$
5	F	W	W	E	W	1	$P_{i,j}=P_{i,j-1}$
6	F	W	F	W	W	1	$P_{i,j}=P_{i+1,j}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i+1,j-1/2}-V_{i+1,j+1/2})$
7	F	W	E	W	W	1	$P_{i,j}=P_{i+1,j}$
8	F	F	W	W	W	1	$P_{i,j}=P_{i-1,j}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i-1,j-1/2}-V_{i-1,j+1/2})$
9	F	E	W	W	W	1	$P_{i,j}=P_{i-1,j}$
10	F	W	W	F	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}-U_{i+1/2,j-1}+U_{i-1/2,j+1}-U_{i+1/2,j+1})\}$
11	F	W	W	F	E	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}-U_{i+1/2,j-1})\}$
12	F	W	W	E	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j+1}-U_{i+1/2,j+1})\}$
13	F	W	W	E	E	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i,j-1}+P_{i,j+1})$
14	F	F	F	W	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i-1,j-1/2}-V_{i-1,j+1/2}+V_{i+1,j-1/2}-V_{i+1,j+1/2})\}$
15	F	F	E	W	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i-1,j-1/2}-V_{i-1,j+1/2})\}$
16	F	E	F	W	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i+1,j-1/2}-V_{i+1,j+1/2})\}$
17	F	E	E	W	W	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i-1,j}+P_{i+1,j})$
18	F	W	F	W	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j+1}+V_{i+1,j-1/2})\}$
19	F	W	F	W	E	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i+1,j-1/2}\}$
20	F	W	E	W	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j+1}\}$
21	F	W	E	W	E	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i+1,j}+P_{i,j+1})$
22	F	W	F	F	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}-V_{i+1,j+1/2})\}$
23	F	W	F	E	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i+1,j+1/2}\}$
24	F	W	E	F	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j-1}\}$
25	F	W	E	E	W	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i+1,j}+P_{i,j-1})$

第2(b)表　つづき
Table 2(b)　(continued)

フラグ値	セルの状態					場合の数	$P_{i,j}$ について解くべき式
	(i, j)	$(i-1, j)$	$(i+1, j)$	$(i, j-1)$	$(i, j+1)$		
26	F	F	W	W	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j+1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i+1/2,j+1}-V_{i-1,j-1/2})\}$
27	F	F	W	W	E	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i-1,j-1/2}\}$
28	F	E	W	W	F	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j+1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i+1/2,j+1}\}$
29	F	E	W	W	E	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i-1,j}+P_{i,j+1})$
30	F	F	W	F	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i+1/2,j-1}+V_{i-1,j+1/2})\}$
31	F	F	W	E	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i-1,j+1/2}\}$
32	F	E	W	F	W	1	$P_{i,j}=1/2\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i+1/2,j-1}\}$
33	F	E	W	E	W	1	$P_{i,j}=1/2\,(P_{i-1,j}+P_{i,j-1})$
34	F	W	F/E	F	F	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}+U_{i-1/2,j+1})\}$
35	F	W	F/E	F	E	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j-1}\}$
36	F	W	F/E	E	F	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j+1}\}$
37	F	W	F/E	E	E	2	$P_{i,j}=1/3\,(P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1})$
38	F	F/E	W	F	F	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(U_{i+1/2,j-1}+U_{i+1/2,j+1})\}$
39	F	F/E	W	F	E	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i+1/2,j-1}\}$
40	F	F/E	W	E	F	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}U_{i+1/2,j+1}\}$
41	F	F/E	W	E	E	2	$P_{i,j}=1/3\,(P_{i-1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1})$
42	F	F	F	W	F/E	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i-1,j-1/2}+V_{i+1,j-1/2})\}$
43	F	F	E	W	F/E	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i-1,j-1/2}\}$
44	F	E	F	W	F/E	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i+1,j-1/2}\}$
45	F	E	E	W	F/E	2	$P_{i,j}=1/3\,(P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j+1})$
46	F	F	F	F/E	W	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}(V_{i-1,j+1/2}+V_{i+1,j+1/2})\}$
47	F	F	E	F/E	W	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i-1,j+1/2}\}$
48	F	E	F	F/E	W	2	$P_{i,j}=1/3\,\{P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+(\delta\cdot\mathrm{Re})^{-1}V_{i+1,j+1/2}\}$
49	F	E	E	F/E	W	2	$P_{i,j}=1/3\,(P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j-1})$
50	F	F/E	F/E	F/E	F/E	16	$P_{i,j}=1/4\,(P_{i-1,j}+P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1})$
51	E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$P_{i,j}=\text{given}$

第２(c)表　粘性流をシュミレートするためのx方向の流速Uに対する差分方程式。

Table 2(c)　Finite difference equations for the flow velocity in the x-direction, U, of 2-dimensional viscous flow.

フラグ値	セルの状態 (i, j)	$(i+1, j)$	$(i, j-1)$	$(i+1, j-1)$	$(i, j+1)$	$(i+1, j+1)$	場合の数	$U_{i+1/2, j}$ について解くべき式
0	W	W	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	162	$U_{i+1/2, j}$ = undefined
	E	E						
1	W	F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	324	$U_{i+1/2, j} = 0$
	F/E	W						
2	F	E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$U_{i+1/2, j} = U_{i-1/2, j} + V_{i, j-1/2} - V_{i, j+1/2}$
3	E	F	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$U_{i+1/2, j} = U_{i+3/2, j} - V_{i+1, j-1/2} + V_{i+1, j+1/2}$
4	F	F	W	W	W	W	1	$U_{i+1/2, j} = 1/6\ \{U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
5	F	F	W	W	E	E	2	$U_{i+1/2, j} = 1/4\ \{U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
			E	E	W	W		
6	F	F	E	E	E	E	1	$U_{i+1/2, j} = 1/2\ \{U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
7	F	F	W	W	others*1		7	$U_{i+1/2, j} = 1/5\ \{U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + U_{i+1/2, j+1} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
8	F	F	E	E	others*1		7	$U_{i+1/2, j} = 1/3\ \{U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + U_{i+1/2, j+1} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
9	F	F	others*1		W	W	7	$U_{i+1/2, j} = 1/5\ \{U_{i+1/2, j-1} + U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
10	F	F	others*1		E	E	7	$U_{i+1/2, j} = 1/3\ \{U_{i+1/2, j-1} + U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$
11	F	F	others*2				49	$U_{i+1/2, j} = 1/4\ \{U_{i+1/2, j-1} + U_{i-1/2, j} + U_{i+3/2, j} + U_{i+1/2, j+1} + \delta \cdot \mathrm{Re}(P_{i, j} - P_{i+1, j})\}$

注：*1 ２つのセルがフラグ値４～６のそれらに対応するセルの状態ではない場合。*2 ４つのセルがフラグ値４～10のそれらに対応するセルの状態ではない場合。

第2(d)表　粘性流をシュミレートするためのy方向の流速Vに対する差分方程式.

Table 2(d)　Finite difference equations for the flow velocity in the y-direction, V, of 2-dimensional viscous flow.

フラグ値	セルの状態						場合の数	$V_{i,\,j+1/2}$ について解くべき式
	$(i,\,j)$	$(i,\,j+1)$	$(i-1,\,j)$	$(i-1,\,j+1)$	$(i+1,\,j)$	$(i+1,\,j+1)$		
0	W	W	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	162	$V_{i,\,j+1/2}$ = undefined
	E	E						
1	W	F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	324	$V_{i,\,j+1/2} = 0$
	F/E	W						
2	F	E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$V_{i,\,j+1/2} = V_{i,\,j-1/2} + U_{i-1/2,\,j} - U_{i+1/2,\,j}$
3	E	F	W/F/E	W/F/E	W/F/E	W/F/E	81	$V_{i,\,j+1/2} = V_{i,\,j+3/2} - U_{i-1/2,\,j+1} + U_{i+1/2,\,j+1}$
4	F	F	W	W	W	W	1	$V_{i,\,j+1/2} = 1/6\,\{V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
5	F	F	W	W	E	E	2	$V_{i,\,j+1/2} = 1/4\,\{V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
			E	E	W	W		
6	F	F	E	E	E	E	1	$V_{i,\,j+1/2} = 1/2\,\{V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
7	F	F	W	W	others*1		7	$V_{i,\,j+1/2} = 1/5\,\{V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + V_{i+1,\,j+1/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
8	F	F	E	E	others*1		7	$V_{i,\,j+1/2} = 1/3\,\{V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + V_{i+1,\,j+1/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
9	F	F	others*1		W	W	7	$V_{i,\,j+1/2} = 1/5\,\{V_{i-1,\,j+1/2} + V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
10	F	F	others*1		E	E	7	$V_{i,\,j+1/2} = 1/3\,\{V_{i-1,\,j+1/2} + V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$
11	F	F	others*2				49	$V_{i,\,j+1/2} = 1/4\,\{V_{i-1,\,j+1/2} + V_{i,\,j-1/2} + V_{i,\,j+3/2} + V_{i+1,\,j+1/2} + \delta\cdot\mathrm{Re}(P_{i,\,j} - P_{i,\,j+1})\}$

注：*1 2つのセルがフラグ値4～6のそれらに対応するセルの状態ではない場合。*2 4つのセルがフラグ値4～10のそれらに対応するセルの状態ではない場合。

の流体の流入・流出量の絶対値の比較が有用である）．それゆえ，ネットワークを有限要素で近似したシュミレーションの場合にも，最後にこの量を計算するようにしている（第1図(i)の処理）．

4．シュミレーション結果の比較

以上で説明したように，ネットワーク解析では，X線CT画像中のネットワークを伝った流れの解析を行うための手法として以下の3つのものがある；(1)ネットワークの領域をPCモデルで近似した後にそれを構成するチャンネルの流量をキルヒホッフの法則を用いて計算する手法（以下では，PCモデルによる解析と呼ぶ），(2)PCモデルから得られたチャンネルの形状抵抗の分布からEMAによってネットワークを伝った流れの巨視的な伝導度を推定する手法(以下では，EMAによる解析と呼ぶ)，(3)ネットワークの領域を有限要素（セル）で近似して，その上で流体の流れを支配する微分方程式を差分化して解く手法（以下では，有限要素（FE）モデルによる解析と呼ぶ）．ここでは，これら3つの手法の有効性の評価のため，同じサンプル画像についてこれらを用いて得られた流れに対するネットワークの巨視的な伝導度の比較・検討を行う．

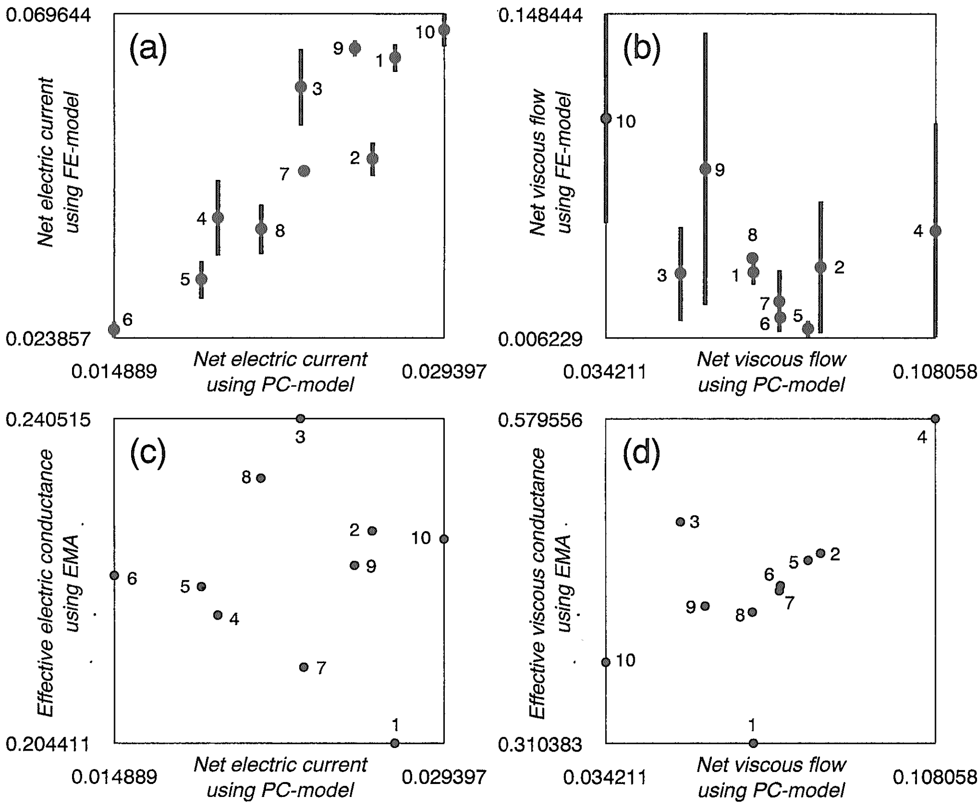
解析を行ったサンプル画像は，第2図で示したものを含む10枚のX線CT画像である．これらはすべて同じサンプル(鉄鉱石焼結体)の画像で，3次元のX線CT画像(中野ほか，1992；Nakano *et al.*，1992）を作成するために取得した断層画像のうちの一部である(すなわち，№1～10の順に岩石をスライスした断層画像で，№1と10がそれらの上下の端の画像，また，№10が第2(a)図の画像である）．10枚のX線CT画像のサイズはすべて150（画素）×150（画素）×256（輝度レベル）で，各々に含まれる画像の内容はどれも第2(a)図と同様なものであった．そこで，第2(b)図を求めた場合と同じ輝度値を境にしてこれらすべての画像を2値化し，各々の画像から最大サイズのクラスタだけを抽出した．

10枚のX線CT画像に含まれていた最大サイズのクラスタ（ネットワーク）それぞれについて，上で述べた3つの手法を用いて電流と粘性流に対する巨視的な伝導度を計算した．ただし，PCモデルによる解析とFEモデルによる解析では，各々のネットワークに対する流体の外部からの流入・流出口として第2図のものと同様な1組のものだけに対する計算だけを行い，それらからの流入・流出量の絶対値を各ネットワークの巨視的な伝導度であると見なした．また，FEモデルによる解析では，計算に要する時間も同時に評価するために，緩和法の繰り返しループの回数の上限値を与えて計算を行った（繰り返し回数の上限値は，10個のネットワークの電流と粘性流の計算に対して同じ値を与えた）．この結果，PCモデル(およびEMA)による解析では，巨視的な伝導度の値は計算機の最高精度で求まるのに対して，FEモデルでは十分な緩和計算の収束が達成されていないことに起因する流入・流出口での流量の絶対値の違い（計算誤差）が生じることになる．

3つの手法を用いて得られた電流と粘性流に対するネットワークの巨視的な伝導度の比較を第5図に示した．ただし，ここで示した各ネットワークに対する巨視的伝導度の値は，ネットワーク解析のソフトウェア（第1表および付録A）から出力された生の値で，種々の補正計算（(3)，(4)式の係数分の補正や(11)，(18)式で示した無次元化の補正）を行わないとその絶対値の直接の比較はできない．そこで，ネットワークごとの巨視的伝導度の値の比に注目しよう．

まず，第5(a)図に示したPCモデルとFEモデルによる電流に対する巨視的伝導度の比較結果を検討する．FEモデルの誤差（これは，緩和法計算の収束の悪さに起因する）を考慮に入れても，両者の結果は比例関係にあることが第5(a)図から明らかである．すなわち，PCモデルでネットワークを伝った電流を解析したものとFEモデルでの結果は，どちらもほぼ同じ流れをシュミレートしているようである．FEモデルに比べると，PCモデルの計算は流れの流路やそれを支配する方程式に関してかなりの近似や省略を行っているので，ここでの一致(比例関係)は特筆に値する．すなわち，電流に限って言えば，PCモデルによる解析は，従来行われていた(FEモデルを用いた）流体力学のシュミレーション法を代用できるほどに有効である．

次に，PCモデルとFEモデルによる粘性流に対するネットワークの巨視的な伝導度の解析結果（第5(b)図）を検討する．電流の場合に比べると，FEモデルによる計算では，ネットワークの巨視的な伝導度の推定値の誤差が非常に大きい．これは，電流の場合に比べて，粘性流の場合には解くべき式の個数が増加することに起因すると考えられる（後述）．さらに，PCモデルによる伝導度の値とFEモデルによる粘性流の巨視的伝導度の値の間には，電流の場合のような比例関係はないようである．この原因として以下の2つが考えられる．まず第1に，PCモデルの各チャンネルの抵抗値（伝導度）の計算法（近似法）の不十分さがあげられる．電流の場合に比べると，粘性流ではチャンネルの幅 w に対する伝導度の依存性がより大きい（(5)式にも示されているように，電流では各



第 5 図　ネットワーク解析の 3 つの手法で求められた岩石サンプルの巨視的な伝導度の間の関係.

Fig.5　Relationships between macroscopic flow conductances of a rock sample obtained from three different methods in the network flow analysis.

チャンネルの伝導度が w に比例するだけなのに，粘性流では w^3に比例する）．そのため，電流に比べると，粘性流ではチャンネルの幅の狭い部分にそれを伝った流れが規制されるため，(1)式のようなチャンネル幅の第 1 近似では不十分であると考えられる．すなわち，各チャンネルの形状をその幅の最も狭い部分を反映させる形でより高精度に近似する必要がある．第 2 に，粘性流に対する FE モデルで用いた差分方程式の問題があげられる．付録 B でも説明されているように，粘性流に対する差分方程式（第 2 (b)，(c)および(d)表）は，境界条件によってはその導出時にあいまいさがある．これは，流路が込み入っている（すなわち，ネットワークが細くなっている）部分もしくは外部からネットワークに流体が流入・流出するセルの周囲において表面化する問題である．通常の流体力学のシュミレーションでは，このような流入・流出口や壁面（境界）付近での方程式のあいまいさ（もしくは計算精度の低下）を避けるために，境界の形状を単純にしたり，それらの付近でセルの形状やサイズを変えることがしばしば行われる．ネットワーク解析の FE モデルではそれを行っていないので，十分な精度で粘性流の振る舞いがシュミレートされていない可能性がある（なお，流入・流出口や境界の形が単純な場合ならば，ネットワーク解析の FE モデルで得られた粘性流のプロファイルが流体力学の解析解と一致することは確認済みである）．

電流および粘性流に対する PC モデル（もしくは FE モデル）と EMA で計算した巨視的伝導度を比較すると（第 5 (c)および(d)図），粘性流に対する PC モデルと FE モデルの場合以上に，これらの間には相関がない．ただし，PC モデルと EMA で得られた伝導度の最小値と最大値の比を比較すると，後者は前者に比べて非常に小さい．言い換えると，EMA で得られた巨視的伝導度は，ネットワークごとのばらつきが小さい．EMA では，その導入の経緯のところでも述べたように，ネットワークのつながり具合にあまり依存しない量として，ネットワークのチャ

ンネルの伝導度の値の分布から推定される巨視的な伝導度を求めている．すなわち，同じようなチャンネルの伝導度分布を持つネットワークでは，EMA で求めた巨視的伝導度の値はほぼ同じになる．ここで用いた10個のネットワークはどれも同じ岩石から得たものなので，EMA でほぼ同じ巨視的伝導度が得られたことは当然の結果と言えよう．

ネットワーク解析の手法の比較の最後として，計算に要する時間について述べよう．電流と粘性流に対するシュミレーションのどちらも EMA，PC モデルそして FE モデルの順で長い計算時間を要した．EMA と PC モデル（正確には PC モデルで近似したネットワークに対して EMA を用いた場合とキルヒホッフの法則から流れを計算した場合）では，どちらもネットワークの三角形分割のための計算が必要である．この計算手続き（中野・藤井，1991b）は非常に複雑であるが，取り扱う画像サイズがあまり大きくない（たとえば，1000×1000画素程度の画像）ならば，高速な計算機を使って処理を実用的な時間内に行うことができる．また，キルヒホッフの法則を用いた流れの計算も，十分なメモリを持った計算機ならば，実用的には特に問題はない．なお，EMA の計算（(7)もしくは(8)式の解の計算；中野，1992）はパーソナルコンピュータでも行える程度の計算量しか必要としない．

FE モデルを用いた流れのシュミレーションは，第5(a)図（電流に対する結果）で行った計算精度のものでさえ PC モデルの場合の10倍以上の計算時間を要する．また，粘性流に対するもの（第5(b)図）では，解くべき方程式の個数が電流の場合より増えるため（第2表），計算量は電流の場合よりさらに増加する．これらは，シュミレーションで用いている単純な緩和法に原因があるので，解の収束に至るまでの緩和の繰り返し回数が少なくて済む逐次加速緩和法などを使用する必要があるだろう（ただし，FE モデルでは，電流の場合でさえも PC モデルに比べて解くべき式の数が圧倒的に多いので，計算時間の大幅な短縮は望めそうにもないが）．

5．おわりに

岩石中の割れ目や粒界のなすネットワークは3次元的に複雑なつながりかたをしている（中野ほか，1992；Nakano *et al.*, 1992）．それゆえ，本文で説明したネットワーク解析も2次元でなく3次元において行う必要がある．その際，PC モデルを用いた解析の場合には，ネットワークをなす領域を三角形でなく四面体によって分割することになる．また，FE モデルを用いた解析では，差分方程式の導出を3次元の系について行えばよい．しかしながら，そのどちらの解析も現時点では実現していない．前者の場合，それはネットワーク領域の四面体分割を一意的に行うためのアルゴリズムを考案していないことによる．また，後者は，差分方程式の導出が複雑になる上，2次元でさえも長大であった流れのシュミレーションに要する計算量が3次元では膨大なものになると考えられるからである．これらの問題を解決して，3次元のX線 CT 画像を用いたネットワーク解析のソフトウェアを開発することが今後の課題である．

ネットワーク解析は，おもに実験的には測定が困難な部分溶融岩中のマグマの流れなどをシュミレートし，それに伴う岩石全体の巨視的な物性値を推定するために開発された．しかしながら，岩石中の流体がマグマではなく水の場合は，その浸透率や岩石全体の電気伝導度を地下深部の状態を再現したアナログ実験によって求めることが比較的容易である．それゆえ，実験的に求めた浸透率あるいは電気伝導度とネットワーク解析から推定される値を比較することも今後検討したい．

なお，本文で説明したネットワーク解析用のすべてのソフトウェア（第1表に示されたものとそれ以外の関連ソフトウェア）はすべて配付可能である．ご希望のかたは筆者まで連絡いただきたい．

謝辞：本文で例として用いたX線 CT 画像は新日本製鐵株式会社に提供していただいた．また，本文の作成にあたり地質調査所地殻熱部石戸　恒雄氏から貴重なコメントを多数いただいた．ここに記して感謝の意を表します．

付録A．ネットワーク解析のソフトウェア概説

本文で説明したネットワーク解析を実際に行うためのソフトウェアには第1表に示したようなものがある．同表で説明されているように，これらは各々，ネットワーク解析を構成するそれぞれの処理（第1図）だけを行う単機能のソフトウェアで，UNIX もしくは MS-DOS の上で起動可能な C 言語によるプログラムである．ネットワーク解析のある程度まとまった処理内容（たとえば，画像の前処理を行うことなど）を実行するためには，UNIX や MS-DOS のバッチ処理でこれらを順番に起動する必要がある．

第1表に示したソフトウェアで取り扱うデータのうち，画像データはすべて Bitmap と呼ばれる形式のものである（中野・藤井，1989a）．この形式では，2値画像データもそうでない一般の多値画像データも取り扱うことができる．また，それ以外のデータは，フリーフォーマットのアスキーテキストの数値としてファイルに格納された

ものである（これらのファイルの詳細は，第1表に示した参照文献で詳しく説明されている）．

第1表に示したソフトウェアのうち参照文献がないものと本文で初出なものについて補足説明を行う．まず，プログラム gfit などで行っている処理内容について補足する．これらは，もとの画像データ（たとえば，第2(a)図）にあらわれる輝度の出現頻度分布を解析して，それを2値化する際の境界となる輝度の値を求めるためのソフトウェアである．ネットワーク状の物体が認識できる画像データでは，通常はネットワークをなしている部分とそうでない部分の輝度値にかなりのコントラストがある．そこで，画像全体の輝度の出現頻度曲線（ヒストグラム）をガウシアン関数のような山型の関数を2つ重ね合わせたもので近似する．そして，それらのピークの間の谷の位置を2値化のための輝度の境界値と見なすわけである．また，輝度のヒストグラムを適当な関数（3次の多項式など）でスムーシングして，そのピーク（ボトム）の位置を推定してもよい．なお，注意しておきたいことは，ここで行った2値化の境界値の決定がこれ以降のネットワーク解析の結果の信頼性を決めてしまうことである．すなわち，これ以降で用いるネットワークの形状は2値化によって決められてしまう．それゆえ，2値化を客観的に行わなければ，ネットワーク解析には何の意味もなくなる（X線CT画像を用いた場合には，画像の輝度値がそこでの密度を表すので，輝度値の頻度分布を行わないでも適当な境界値を設定できる）．

有限要素近似による流れのシュミレーションを行うソフトウェアの個々の処理内容の補足説明は以下のとおりである．プログラム bm2p および bm2puv は，電流もしくは粘性流のシュミレーションを行う際に，周囲のセルの状態によって選択されるフラグ値（第2表）をネットワークの領域を示す2値画像データから決めるために用いる（画像データから得られたフラグ値をファイルに書き出す）．さらにこれらのプログラムでは，流体が外部からネットワークに流入・流出するセルの位置を指定して，それらを含めたすべてのネットワークのセル（状態Fもしくは E のセル）がつながっているか否かをチェックする．また，流入・流出口に与えた値を含めた緩和法の計算のための電位もしくは圧力の初期値をファイルに書き出す．第1表に示した p および puv は，電流もしくは粘性流のシュミレーションを緩和法によって行うためのプログラムである．これらのプログラムでは，緩和法の繰り返し計算は指定された回数だけ行う．これらを起動させるためには，プログラム bm2p もしくは bm2puv で求めた解くべき式の選択に用いられるフラグ値と電位もしくは圧力の初期値を必要とする（結果として得られた電位もしくは圧力の値をおさめたファイルは，初期値をおさめたものと同じ形をしているので，これらのプログラムを繰り返し起動すれば，解が十分に収束するまで途中経過をチェックしながら計算を行うことができる）．プログラム p2div および puv2div は，ネットワークの流入・流出口での流量をシュミレーション結果から計算する以外に，ネットワークでの各点での計算結果の妥当性を評価するためにも用いられる．すなわち，有限要素近似による流れのシュミレーションでは，(13)や(20)式で示したような流れの保存則（わきだし量が0）を仮定しているので，計算された各点での流量についてわきだし量を計算することにより，緩和法の計算の収束の程度（もしくは計算された流れの妥当性）を調べることができる．

付録B．有限要素近似のための差分方程式の導出

画像から抽出されたネットワークの領域を有限要素（セル）で近似して，それらを用いて，電流や粘性流の支配方程式を直接解く場合の差分方程式の導出法を以下で説明する．ここで，セルはもとの画像で用いていた画素と同じ空間的な広がりを持つものと考える（第4(a)図）．そして，これらは各々，ネットワーク領域に属していないセル（状態W），外部からの流体の流入・流出口に相当するセル（状態E），もしくは，流体のある通常のセル（状態F）のいずれかであるものとする．なお，解くべき方程式が無次元化されている場合（(11)および(18)式）には，セルのサイズを系の特徴的な長さ L と考えて差分に用いる格子間隔を1と設定できるが，ここでは一般性を考えて，それを縦横とも δ とする．また，本文でも述べたように，差分化に際して，電流や粘性流の流れ $\vec{f}=(U,\ V)$ および $\vec{v}=(U,\ V)$ と流れのポテンシャル（電位および圧力）P の値をセルの異なった点で求めることにする（差分化ではくいちがい格子を用いる；第4(a)図）．

B-1．電　流

2次元の電流に対する支配方程式（(12)，(13)および(14)式）を書き下すと以下のようになる．

$$U=-\partial P/\partial x \quad \cdots\cdots (B\text{-}1)$$

$$V=-\partial P/\partial y \quad \cdots\cdots (B\text{-}2)$$

$$\partial U/\partial x+\partial V/\partial y=0 \quad \cdots\cdots (B\text{-}3)$$

$$\partial^2 P/\partial x^2+\partial^2 P/\partial y^2=0 \quad \cdots\cdots (B\text{-}4)$$

これらの式を，くいちがい格子上で中心差分によって差分化すると以下のようになる．

$$U_{i+1/2,j}=-\delta^{-1}(P_{i+1,j}-P_{i,j})\cdots\cdots(\text{B-5})$$

$$V_{i,j+1/2}=-\delta^{-1}(P_{i,j+1}-P_{i,j})\cdots\cdots(\text{B-6})$$

$$\delta^{-1}(U_{i+1/2,j}-U_{i-1/2,j})+\delta^{-1}(V_{i,j+1/2}-V_{i,j-1/2})=0 \cdots\cdots(\text{B-7})$$

$$\delta^{-2}(P_{i+1,j}+P_{i-1,j}-2P_{i,j})+\delta^{-2}(P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-2P_{i,j})=0\cdots\cdots(\text{B-8})$$

ここで，添え字は，計算に用いる諸量の位置する点を示す格子線の番号（第4(a)図）を表す．そして，(B-7) および (B-8) 式は位置 (i, j) で，また，(B-5) と (B-6) 式はそれぞれ位置 ($i+1/2$, j) と (i, $j+1/2$) で差分化を行った結果を示している．

外部からの電流の流入・流出口に相当する状態Eのセルに電位を与える電流のシュミレーションでは，(B-8) 式から導かれる電位 P に関する式，

$$P_{i+1,j}+P_{i-1,j}+P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-4P_{i,j}=0\cdots\cdots(\text{B-9})$$

を状態Fのセルに関して解きさえすれば，流れ(U, V) は (B-5) と (B-6) 式から計算できる．ただし，P を計算するセルの周囲のセルの状態によっては，そこでの電位の値が未定義で (B-9) 式をそのまま使えない場合がある．この場合には，以下のようにして (B-9) 式を書き換えた式を用いなければならない．

まず，周囲のセルのうち1つが状態Wのセルである場合を考える（第4(d)図）．第4(d)図の場合には，セル (i, j) に対する (B-9) 式で $P_{i-1,j}$ が未定義である．そこで，電流はネットワーク領域だけを流れる（すなわち，状態Wのセルと状態Fのセルの間には電流は流れない；今の例では，$U_{i-1/2,j}=0$）という条件を用いて，(B-5) 式より，

$$P_{i-1,j}=P_{i,j}\cdots\cdots(B\text{-}10)$$

と考える．これを (B-9) 式に代入して，

$$P_{i+1,j}+P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-3P_{i,j}=0\cdots\cdots(B\text{-}11)$$

が得られる．周囲に複数個の状態Wのセルがある（たとえば，第4(e)，(f)および(g)図のような）場合にも，同様にして (B-9) 式の代わりに解くべき式を導き出すことができる．なお，周囲の4つがすべて状態Wのセルである場合には，解くべき式が不定になる．すなわち，そのセルはネットワークにつながっていないことになり，$P_{i,j}$ は未定義となる（ネットワーク解析では，ここで用いるネットワークのセルとしてクラスタラベリングによってつながったものを抽出しているため，このような場合は起こりえない）．

上の例のように，各セルにおいて解くべき差分方程式は周囲のセルの状態によって異なった形となる．ネットワーク解析では，これをフラグ（もしくはフラグ値）によって区別している．電流の場合には，このようなフラグ値には18種類（0～17）がある．第2(a)表に，フラグ値0～17のセルの状態とそこで解くべき差分方程式の対応関係を示した．なお，第4(d)，(e)，(f)および(g)図に対応するものは，それぞれフラグ値12，8，6および2の場合である．

実際のシュミレーションの計算（第1表および付録A）では，まず各セルの状態を調べてそれらのフラグ値を求める．その後，緩和法のループで，各セルのフラグ値に従った差分方程式（第2(a)表）を解いて電位 $P_{i,j}$ を計算する．

B-2. 粘性流

2次元の粘性流に対する支配方程式（(19)，(20)および(22)式）を書き下すと以下のようになる（(20)および(22)式に関しては電流のものと同じ形である）．

$$-\mathrm{Re}\,\partial \mathrm{P}/\partial \mathrm{x}+\partial^2\mathrm{U}/\partial \mathrm{x}^2+\partial^2\mathrm{U}/\partial \mathrm{y}^2=0\cdots\cdots(\text{B-12})$$

$$-\mathrm{Re}\,\partial \mathrm{P}/\partial \mathrm{y}+\partial^2\mathrm{V}/\partial \mathrm{x}^2+\partial^2\mathrm{V}/\partial \mathrm{y}^2=0\cdots\cdots(\text{B-13})$$

$$\partial U/\partial x+\partial V/\partial y=0\cdots\cdots(\text{B-14})$$

$$\partial^2 P/\partial x^2+\partial^2 P/\partial y^2=0\cdots\cdots(\text{B-15})$$

ここで，Re は(21)式で定義されたレイノルズ数である．これらの微分方程式を電流の場合と同じ位置で差分化すると（(B-14) と (B-15) 式に関しては電流の場合と同じである），

$$-\mathrm{Re}\,\delta^{-1}(P_{i+1,j}-P_{i,j})+\delta^{-2}(U_{i+3/2,j}+U_{i-1/2,j}-2U_{i+1/2,j})+\delta^{-2}(U_{i+1/2,j+1}+U_{i+1/2,j-1}-2U_{i+1/2,j})=0\cdots\cdots(\text{B-16})$$

$$-\mathrm{Re}\,\delta^{-1}(P_{i,j+1}-P_{i,j})+\delta^{-2}(V_{i+1,j+1/2}+V_{i-1,j+1/2}-2V_{i,j+1/2})+\delta^{-2}(V_{i,j+3/2}+V_{i,j-1/2}-2V_{i,j+1/2})=0\cdots\cdots(\text{B-17})$$

$$\delta^{-1}(U_{i+1/2,j}-U_{i-1/2,j})+\delta^{-1}(V_{i,j+1/2}-V_{i,j-1/2})=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-18})$$

$$\delta^{-2}(P_{i+1,j}+P_{i-1,j}-2P_{i,j})+\delta^{-2}(P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-2P_{i,j})=0 \quad \cdots\cdots (\text{B-19})$$

となる．

状態Ｅのセルに圧力値を与えて行う粘性流のシュミレーションでも，電流の場合と同様に，(B-19)式から導かれる圧力 P に関する式，

$$P_{i+1,j}+P_{i-1,j}+P_{i,j+1}+P_{i,j-1}-4P_{i,j}=0 \quad \cdots (\text{B-20})$$

を解くことになる（この式は電流の場合の (B-9) 式と同じものである)．ただし，電流の場合と異なり，粘性流では圧力 P が求まっただけでは流れ（U, V）は自動的に計算できない．すなわち，(B-16) および (B-17) 式から導かれる，

$$-\delta\mathrm{Re}(P_{i+1,j}-P_{i,j})+U_{i+3/2,j}+U_{i-1/2,j}+U_{i+1/2,j+1}+U_{i+/2,j-1}-4U_{i+1/2,j}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-21})$$

$$-\delta\mathrm{Re}(P_{i,j+1}-P_{i,j})+V_{i+1,j+1/2}+V_{i-1,j+1/2}+V_{i,j+3/2}+V_{i,j-1/2}-4V_{i,j+1/2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-22})$$

を解いて，流れを計算する必要がある．さらに，これらの式は，計算する点の位置の周囲のセルの状態によって様々に書き換える必要がある．そして，以下で説明するように，書き換えによって得られた式は P だけでなく流れ U と V に関するものもあるため，電流の場合に比べると非常に多くのバリエーションを持つ．それを先に説明したフラグ値とともに示したものが第２表の(b)圧力 P に関する式，(c) U に関する式，および(d) V に関する式，である．なお，これらの表においてフラグ値は，それぞれの場合で独立に計算する点の状態を示している（フラグ値は P, U, V に関するものがそれぞれ独立に必要である)．

セルのフラグ値に従った圧力の (B-20) 式の書き換えについて説明しよう．まず，図４(d)のように圧力を計算する位置（i, j）のセルの周囲のセルの１つ（$i-1$, j）が状態Ｗである場合を考える．このとき，電流の場合と同様に，$U_{i-1/2,j}=0$ と仮定できる（流体はネットワークの中だけを流れる)．しかしながら，(B-16) 式にはそれ以外の位置での U が含まれている（図４(d)参照）ために，これだけでは電流の場合のように $P_{i-1,j}$ と $P_{i,j}$の関係を得ることができない．これらの U のうち，$U_{i-3/2,j}$と $U_{i+1/2,j}$ の関係を以下のように仮定する．

$$(U_{i-3/2,j}+U_{i+1/2,j})/2=U_{i-1/2,j}(=0) \quad \cdots\cdots (\text{B-23})$$

この仮定には強い理論的根拠はない（セル内で流れがなめらかである，もしくは，解くべき差分方程式がすべて線形である，という仮定である)．これより，もし(i, $j-1$) および（i, $j+1$）のセルが状態 F ならば，(B-16) 式より，

$$P_{i-1,j}=P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}+U_{i-1/2,j+1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-24})$$

となる．これを（B-20）式に代入して，

$$P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-3P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j-1}+U_{i-1/2,j+1})=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-25})$$

が得られる（これは，第２(b)表のフラグ値34の場合である)．

第４(d)図の場合で，もし(i, $j+1$) が状態Ｅのセルならば，(B-24)式で $U_{i-1/2,j+1}$を用いることには問題がある（このセルが，系の中で圧力を与えて自由に流体を流入・流出させている，という意味で運動方程式（(B-24) 式）に支配されない特殊なセルであるため)．そこで，流体の存在するセルどうしが接していることを考慮して，状態Ｅのセルの辺上では辺に沿った方向に流体が自由にすべるという条件を点(i-1/2, j+1/2)での流速 U に適用して，

$$U_{i-1/2,j+1/2}=U_{i-1/2,j+1}=U_{i-1/2,j}(=0) \quad \cdots\cdots (\text{B-26})$$

を得る（ただしここでも，(B-23) 式の場合と同様に，流れは急変しないという仮定を用いた)．この結果，第２(b)表のフラグ値35に対応する状態の場合には，(B-16)式より，

$$P_{i-1,jj}=P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-27})$$

となり，(B-20) 式は，

$$P_{i+1,j}+P_{i,j-1}+P_{i,j+1}-3P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j-1}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{B-28})$$

のように書き換えることができる．同様にして，(i, $j-1$) が状態Ｅのセルの場合に対する (B-20) 式の書き換えも行うことができる（第２(b)表のフラグ値36と37の場合)．なお，ここで示した状態Ｅのセルの取り扱いは，簡単な境界条件の場合に行った粘性流のシュミレーションで流れの様子が流体力学の解析解と一致することにより妥当

なものであることが確認された．

次に，第4(e)図のようなセル$(i,\ j)$の周囲のセルのうち2つ（$(i-1,\ j)$と$(i,\ j-1)$のセル）が状態Wのセルである場合を考えよう．この場合にも，状態Wのセルの辺上での流速を$U_{j-1/2,j}=0$かつ$V_{i,j-1/2}=0$とする．また，同様に，$U_{i-1/2,j-1}=0$かつ$V_{i-1,j-1/2}=0$が成り立つとする（これらはむしろ，先に説明した状態Eのセルの周囲の辺上での値を求めた（B-26）式と同じ論理で導出した方がよいかもしれない．すなわち，状態Wのセルの周囲の辺上で辺に沿った方向に流体がすべらない条件を点$(i-1/2,\ j-1/2)$に適用して，

$$(U_{i-1/2,j}+U_{i-1/2,j-1})/2=U_{i-1/2,j-1/2}(=0) \quad \text{(B-29)}$$

などから，同じ結果を得る）．そして，（B-23）式と同様にして，

$$U_{i-3/2,j}+U_{i+1/2,j}=0,$$
$$V_{i,j-3/2}+V_{i,j+1/2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B-30)}$$

と仮定する．もし，セル$(i,\ j+1)$と$(i+1,\ j)$が状態Fならば，これらを（B-21）および（B-22）式に代入して，

$$P_{i-1,j}=P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}U_{i-1/2,j+1},$$
$$P_{i,j-1}=P_{i,j}-(\delta Re)^{-1}V_{i+1,j-1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\text{(B-31)}$$

となる．それゆえ，第2(b)表のフラグ値18に対応する状態では，Pに関して，

$$P_{i+1,j}+P_{i,j+1}-2P_{i,j}-(\delta\mathrm{Re})^{-1}(U_{i-1/2,j+1}+V_{i+1,j-1/2})=0 \quad \cdots\cdots(B\text{-}32)$$

を解けばよい．これ以外のフラグ値の場合もほぼ同様にして，圧力Pについて解くべき式を導出できる．なお，ついでながら，第4(e)図の場合に対応する第2(b)表のフラグ値は18〜21，同(f)および(g)図の場合はそれぞれ10〜13と2〜3である．

粘性流の流速UとVに対する差分方程式（B-21）と（B-22）式は，添え字（空間軸のとりかた）に関して対称な形をしている（第4(b)と(c)図を参照のこと）．それゆえ，境界条件にともなう式の書き換え（第2(c)と(d)表）は，どちらか一方だけを導出すればよいので，ここではUの場合だけを考える．

流速Uに関する方程式（B-21）式の書き換え法も圧力Pの場合とほぼ同様である．すなわち，たとえば，状態Wのセル$(i,\ j)$と状態Fのセル$(i+1,\ j)$にはさまれた辺上の点$(i+1/2,\ j)$での流速は，$U_{i+1/2,j}=0$とする（第2(c)表のフラグ値1の場合）．また，これらのセルがともに状態Fで，その上下のセル$(i,\ j\pm1)$および$(i+1,j\pm1)$がどれも状態Wである場合には，壁面上の点$(i+1/2,\ j\pm1/2)$において流体がすべらない条件を用いて，（B-29）式と同様に

$$U_{i+1/2,j\pm1}+U_{i+1/2,j}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B-33)}$$

とする．そして，これらを（B-21）式に代入して，第2(c)表のフラグ値4の場合の差分方程式を得る．さらに，セル$(i,\ j\pm1)$および$(i+1,\ j\pm1)$がどちらも状態Eの場合にも，（B-26）式と同様な点$(i+1/2,\ j\pm1/2)$において流体が自由にすべるという条件，

$$U_{i+1/2,j\pm1}=U_{i+1/2,j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B-34)}$$

を用いれば，第2(c)表のフラグ値6に対応する差分方程式を導出できる．

ところで，先にも述べたように，状態Eのセルの周囲の辺上の流速の値を運動方程式（（B-21）および（B-22）式）から求めることには問題がある．そこで，たとえば，状態Fのセル$(i,\ j)$と状態Eのセル$(i+1,\ j)$の間の点$(i+1/2,\ j)$での流速$U_{i+1/2,j}$を求める際には，運動方程式（（B-21）式）を使わずに，流れの保存則（（B-18）式）を状態Fのセルに適用してその計算を行うことにした．すなわち，第2(c)表に示したフラグ値2の場合のように，（B-18）式から導かれる，

$$U_{i+1/2,j}-U_{i-1/2,j}+V_{i,j+1/2}-V_{i,j-1/2}=0 \quad \cdots\text{(B-35)}$$

を流速$U_{i+1/2,j}$の算出に用いた．

B-3．粘性流に対する差分方程式導出時のあいまいさ

以上で説明したフラグ値ごとの差分方程式の導出法では，粘性流に関するものの場合に2つのあいまいさがある．まず，第1のあいまいさは，（B-23）式などを導出する際に用いた仮定（流れがなめらかである，という仮定）に起因するものである．先にも述べたとおり，この仮定から導き出される（B-23）式には特に理論的な根拠はない．第2のあいまいさは，壁面での流体のすべりに関する条件の適用についてである．たとえば，圧力についてフラグ値35に対する状態の場合の解くべき式を導出した場合（第4(d)図）のように，セル$(i,\ j-1)$にある状態Eのセルによる点$(i-1/2,\ j-1/2)$での流体が自由にすべる条件（（B-26）式）の適用にはあいまいさがある．すなわち，この点は状態Wのセル$(i-1,\ j)$の境界でもあるわけだから，ここでは流体がすべらないという条件（（B-29）式）を適用してもよい（両者の結果は同じ結論を与えることになるが，どの条件を用いるかというあいまい

さが消えるわけではない).

境界条件が単純な場合，すなわち，ネットワークの境界が直線的な輪郭線で表される場合には，これらのあいまいさに起因する差分方程式の問題点は表面化しない．しかしながら，ネットワーク解析で取り扱うような複雑な境界の形状（とくに1つのセルだけでネットワークがつながっている部分）に対しては，これらがそこでの粘性流のプロファイルに大きな影響を及ぼす可能性がある．

文　献

Buneman, C. (1969) A compact non-iterative Poisson solver, *Stanford Univ. Inst. Plasma Res. Rep.*, No.294.

Doyen, P. M. (1988) Permeability, conductivity and pore geometry of sandstone, *J. Geophys. Res.*, vol.93, p.7729-7740.

藤井直之・中野　司(1988)　フーリエディスクリプターとフラクタル次元―粒形解析のためのソフトウェア―，情報地質，No.13，p.119-139.

Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965) Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface, *Phys. Fluid*, vol.8, p.2182-2189.

Kirkpatrick, S. (1973) Percolation and conduction, Rev. Mod. Phys., vol.43, p.574-599.

Koplik, J. (1982) Creeping flow in two-dimensional networks, *J. Fluid Mech.*, vol.119, p.219-247.

久城育夫(1978)　マグマの粘性，地球の物質科学II－火成岩とその成因－（岩波講座地球科学3，久城育夫・荒牧重雄編），岩波書店，p.195-206.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1970) 流体力学1（竹内均訳），東京図書，280p.

Mavko, G. M. (1980) Velocity and attenuation in partially molten rocks, *J. Geophys. Res.*, vol.85, p.5173-5189.

McKenzie, D. P. (1984) The generation and compaction of paritial melts, *J. Petrol.*, vol.25, p.713-765.

室田一雄(1986) Voronoi図とDelaunay網，計算幾何学と地理情報処理(bit別冊，伊理正夫監修，腰塚武志編集，pp235)，p.126-148.

中野　司・藤井直之・堀井 洋一(1988)　"GRAIN"と"EDGE"－粒子画像解析のためのソフトウェア―，情報地質，No.13，p.93-117.

Nakano, T. and Fujii, N. (1989) The multiphase grain control percolation : Its implication for a partially molten rock, *J. Geophys. Res.*, vol.94, p.15653-15661.

中野　司・藤井直之(1989a)　画像処理のためのソフトウェア：(1)領域塗りつぶしと仮想スクリーン処理，情報地質，No.14A，p.93-107.

――――・――――(1989b) 二次元分布データの処理システム：(2)二次元分布データの内挿補間，情報地質，No.14B，p.113-132.

――――・――――(1989c) 二次元分布データの処理システム：(3)等高線図と鳥瞰図，情報地質，No.14B，133-150.

――――(1991) 上部マントルでのマグマの移動と集積の素過程－液相ネットワークの解析－，月刊地球，vol.13，p.341-345.

――――・藤井直之(1991a) 画像処理のためのソフトウェア：(3)粒子像の識別と輪郭線の抽出，情報地質，vol.2，p.23-44.

――――・――――(1991b) 画像処理のためのソフトウェア：(4)画像データからのネットワーク構造の抽出，情報地質，vol.2，p.45-64.

――――・――――(1991c) 画像処理のためのソフトウェア：(5)画像中のネットワーク構造上の流れ解析，情報地質，vol.2，p.275-295.

――――(1992) 画像処理のためのソフトウェア：(6)有効媒質近似によるネットワークの巨視的伝導度の推定，情報地質，vol.3，p.139-148.

――――・西澤　修・増田幸治・稲角忠弘・笠間俊次(1992) X線CTによる岩石内部構造の三次元観察，月刊地球，vol.14，p.616-620.

Nakano, T., Nishizawa, O., Masuda, K., Inazumi, T. and Kasama, S. (1992) Three-dimensional distribution of cracks and minerals in a rock obtained by X-ray CT, *Geotomography*, SEGJ Int. Pub. No.2, p.361-371.

O'Connel, R. J. and Budiansky, B. (1977) Viscoelastic properties of fluid saturated cracked solids, *J. Geophys. Res.*, vol.82, p.5719-5735.

Ribe, N. M. (1987) Theory of melt segregation －A review, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, vol.33, p.241-253.

Shankland, T. J. and Waff, H. S. (1974) Conductivity in fluid-bearing rocks, *J. Geophys. Res.*, vol.79, p.4863-4868.

——— and Waff, H. S. (1977) Partial melting and electrical conductivity anomalies in the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, vol.82, p.5409-5417.

Stauffer, D. (1985) 浸透理論の基礎（小田垣孝訳），吉岡書店，188p.

高安秀樹(1986)　フラクタル，浅倉書店，186p.

Welch, J. E., Harlow F. H., Shannon, J. P. and Daly, B. J. (1966) The MAC method : A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces, *Los Alamos Sci. Lab*. Rep., LA-3425.

Yonezawa, F. and Cohen, M. H. (1983) Granular effective medium approximation, *J. Appl. Phys.*, vol.54, p.2895-2899.

（受付：1995年10月4日；受理：1995年10月26日）