

ブートストラップ法によるトモグラフィーII (計算例と考察)  
—弱い速度異方性の場合におけるトモグラフィ—

西澤 修\* 野呂 春文\*\* 増田 幸治†

NISHIZAWA Osamu, NORO Harufumi and MASUDA Koji (1994) A new method of tomography by means of bootstrap statistics II (numerical study) —Tomography in a weak velocity anisotropy—. *Bull. Geol. Surv. Japan*, vol. 45(1), p. 15-38, 9figs. 1table.

**Abstract:** We applied a new information criterion EIC (Extended Information Criterion) for determining an optimum model in P-wave velocity tomography reconstructed by SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique). The reconstruction was made in a plane including the unique axis of the columnar rock sample subjected to differential stress and confining pressure. The differential stress produces a weak velocity anisotropy caused by the preferred orientation of the stress induced cracks. The high pressure water was injected into the rock sample from the sample end. Assuming that the P-velocity along the maximum stress direction ( $V_{\max}$ ) is equal in all the pixels, we reconstruct the P-velocity along the minimum stress axis; this velocity is strongly affected by water and thus reveals the movement of water. We calculate EIC in each step of the iteration in SIRT with changing the value of  $V_{\max}$ , and compare EIC values. We then select the combination of the number of iteration and  $V_{\max}$  giving the smallest EIC, and obtain an optimum model. This method is free from the difficulty lying in the conventional SIRT: too many iterations for reducing the sum of the squares of the residuals mislead us to unreasonable models. We also obtain the distributions of the model parameters calculated from the bootstrap sample. We can estimate uncertainty of the model parameters by corresponding the variances of those distributions to the uncertainties of the estimated model parameters by SIRT. The bias measured from the mean value of the parameter distribution calculated from the bootstrap sample to the value of the original model parameter by SIRT should correspond to the value of the model correction if the correction in SIRT is reasonable. When the above bias increases with increasing of the iteration number, this inconsistency of the parameter indicates a false parameter suggesting an artifact. Thus we can estimate uncertainty of the model parameter and discern artifacts or false images. Although the present example is only a small problem, 36 data and 30 parameters, we believe that this method is very promising in the near future because the recent rapid progress in computer technology soon allows us to apply this method to larger inverse problems.

要 旨

SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Tech-

nique)を用いたP波速度トモグラフィ—における最適モデルの選択にEIC (Extended Information Criterion)を適用した。速度構造の再構成は、円柱状の岩石試料の

\* 地殻熱部  
\*\* 地質情報センター  
† 環境地質部

Keywords: inverse problems, tomography, information criterion, EIC, anisotropy

主軸を含む面でおこなった。この岩石試料は封圧下で差応力を受けており、応力によって生じたクラックの選択配向を持っている。試料に高圧の水を一方の端面から注入した。最大主応力の方向のP波速度がすべてのピクセルで等しいとして、最小主応力方向のP波速度を再構成したが、この方向は水の注入による速度が変化が最も顕著に現れるので水の浸透の様子を詳しくとらえることができる。最大主応力方向のP波速度を変えながら、SIRTの各補正のステップごとのEICの値を計算し、EICの最小値を与える補正計算と最大主応力方向のP波速度の組を求めるとこれが最適モデルとなる。モデルパラメタの逐次修正法においてしばしば現れる繰り返し計算終了の規準に対する任意性を回避することができる。ブートストラップサンプルに対応したモデルパラメタの分布が得られるのでこの分布の分散から推定されたモデルパラメタの不確かさを見積もることができる。また、ブートストラップサンプルに対応したモデルパラメタ分布の平均値とSIRTから決めたもとのモデルとの値の間のバイアスはSIRTにおけるモデルパラメタの修正値に対応させることができる。もしモデルの修正でこのバイアスの絶対値がさらに大きくなるようであれば、モデルが正しく修正されていないことになり、まちがったパラメタ推定を示唆していると考えられる。以上のように、この方法ではモデルパラメタの不確かさが推定でき、偽像を客観的に見分けることができる。今回の問題はデータ数が36ピクセル数が30といった小規模な問題であったが、昨今のコンピュータ技術の進歩を考えれば、この方法をより大きな問題に適用することも近い将来可能となり、この方法には大きな期待ももてる。

## 1. はじめに

われわれは、前報告(西澤ほか, 1993)でブートストラップ法をトモグラフィに適用するための基礎を述べた。ここでは実際の計算例を詳細に検討し、ブートストラップ法適用の有効性について議論する。前報ですでに述べたように、この手法の適用で利点の得られる問題は、1.最尤法が利用できないもの、2.データ数がモデルパラメタに比べて十分に大きくないため、AICによる比較ができないもの、3. ABICにもとづいたモデル推定の最適化に伴う数学的煩雑さをさけたい場合、などである。

SIRTのようなモデルパラメタの逐次修正法では、モデル推定アルゴリズムが最尤法になっていない。このようなとき、修正によって残差を小さくしても最適モデルを再構成することは困難であり、不合理なモデルが現れ

ることがある(Ivansson, 1983)。すでに前報で述べたように、最適モデルの判定は残差の2乗和ではなく、情報量規準によるべきであり、モデルの良さを比べるためにEICを使うことができる(石黒, 1990, 1991; Ishiguro and Sakamoto, 1991)。SIRTではモデル修正の各ステップでEICを計算し、EICが最小となったところで修正を打ち切り、このときのモデルを最適モデルとして採用すればよい。これにより過度の修正によって生じる不合理なモデルパラメタの出現を抑えることができる。ブートストラップ法ではこのように最適モデルの選択にとどまらず、各ピクセルでのモデルパラメタの誤差評価、モデルパラメタの修正値に矛盾がないかどうかの客観的判定が可能となる。

本報告ではまず、ブートストラップサンプルの数とEIC値のばらつきをしらべ、実用上問題のない程度のサンプル数を見いだす。つぎに修正の各ステップで計算されるEIC値の変化のようすをさまざまなケースについて調べる。さらにブートストラップサンプルから推定されるモデルパラメタ(スローネス)の統計的ばらつきや、これらの平均値とSIRTによって求められた元のモデルパラメタとの差(バイアス)を調べ、モデルパラメタの誤差や、偽像についても議論する。とくに偽像については、これまで客観的に判別する手法がなく、パラメタの物理的意味などを考慮した主観的な判断に頼っていた。ここでは、SIRTにおける補正の途中で現れるバイアスの変化から不合理な修正が行われているかどうかを調べ、偽像の判定を行う。

前報で述べたように、ここで取り上げる事例はMasuda *et al.* (1990)による差応力を受けた岩石中に高圧の水を注入した際のP波速度トモグラフィである。前報で述べたように、モデルには異方性(水平等方性)が考慮されている。観測データは岩石への水注入の際のP波走時で、計測が行われた各時点で水の浸透の度合いが異なるため、いくつかの異なる速度構造についてEIC値の挙動を詳しく調べることができる。とくに水が浸透する前の岩石が乾燥した状態、岩石内部に部分的に水が浸透した状態、完全に浸透して速度構造がほぼ均一になった状態について、モデルとEIC値の挙動との関係を詳細に追うことができる。

## 2. 実験の概略

Masuda *et al.* (1990)で行われたトモグラフィの波線配置についてはすでに前報の第2図で示した。試料は40 MPaの封圧下におかれ、通常のひずみ速度( $10^{-4}$  ~  $10^{-5}$ /s)で得られる破壊強度の70%程度の応力を与

え、この応力レベルを4.5時間保持する。このあと圧力17 MPaの水を試料端面の一方から注入する。水の注入以前に、マイクロクラックは試料内の各部分で発生しているが、一定応力に保持した後は試料の片側に弱い集中を示すことがアコースティックエミッションの震源分布から確かめられた(Masuda *et al.*, 1990)。注入された高圧の水は、マイクロクラックのわずかな集中が見られる側へ選択的に流れるようになる。この水は、岩石の受ける有効封圧を下げ、その部分の岩石の破壊強度を下げる。このため、水が集まった場所でマイクロクラックは増加し、水はさらに集中域に流れ込み、最後は破壊が加速的に進んでマクロな破壊にいたる。第1図に中央部付近(図のR3-S3)でのP波速度変化を示す。水の浸透により岩石は乾燥状態から湿潤状態に変化し、P波速度が増加する。さらに水が浸透し、破壊が進行するにつれP波速度は徐々に減少し、クラックの集中が見られた部分から破壊が広がり、最後に岩石全体が破壊する。水がクラックの多い側を選択的に浸透して行くようすは速度トモグラフィーによってとらえることができた。

### 3. EIC 計算の実例

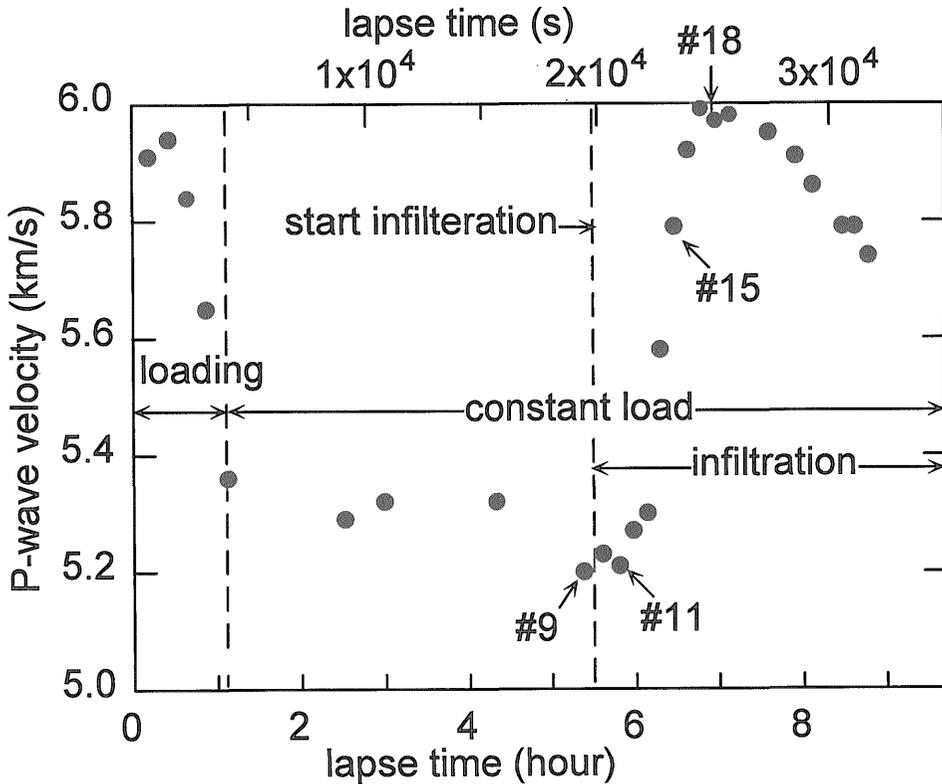
前報第5図に示した最大主応力方向のP波スローネス  $S_y(0)$  はすべてのピクセルで一定としているので、まずこの値を物理的に意味のある範囲で仮定する。つぎにSIRTの補正計算の各段階で計算されるのは最小主応力方向の速度  $S_y(\pi/2)$  で、この値が各ピクセルごとに求められる。したがって、速度構造を示すモデルパラメタは最大主応力方向のスローネスと各ピクセルにおける  $S_y(\pi/2)$  である。これらの値が補正計算の各段階で求められ、対応するEICの値が決める。つぎに、最大主応力方向のスローネスの値を変えて同様の計算を行う。こうすることにより、最大主応力方向のスローネス(または速度)とSIRTの補正計算の回数ふたつを変数としてEICの値を求める。

EICは統計的に計算される量であるので、値のばらつきはブートストラップサンプルの数に依存する。ブートストラップサンプル数に対するEIC値のばらつきを示した一例が第1表で、サンプル数を50, 100, 500, 1000にとり、各サンプル数での計算を50回行いEIC値の分散を求めた。この表ではバイアス補正の方法として、Ishiguro and Sakamoto (1991)による前報の(13)式と、北川(1991)による前報(18)式を用いた場合の結果とがそれぞれ(I & S 13)および(K 18)で示されている。どちらの場合も補正計算の回数とともにばらつきは大きくなる。サンプル数が少ない場合のばらつきは北川によ

る方法のほうが小さいが、サンプル数が1000になると結果にはほとんど差がない。北川(1991)の方法ではデータ数に依存したばらつき修正があらかじめ行われているため、少ないブートストラップサンプルの数でもばらつきを小さくできる。AICと同様、EICもモデルに有意な差があると判断できるのは、モデル間での情報量規準の差が1程度であるので、ブートストラップサンプルを500以上にとれば、モデル間のEICの差は統計的ばらつきより大きく、これを有意とみなすことができる。以下のすべての計算は、バイアス補正の式としてIshiguro and Sakamoto (1991)による式(前報の(13)式)を用い、サンプル数を1000、試行の回数を50回としたものである。

EIC値の変化の様子を見るため、第2図に#11における負の対数尤度の2倍、EIC計算のためのバイアス補正值(2C\*)およびEIC値のそれぞれをを三次元で表示する。平面上の横軸とたて軸はそれぞれ補正計算の回数と最大主応力方向のP波速度の値である。負の対数尤度は最初の補正計算で著しく小さくなるが、その後はゆるやかに減少する。しかし、12回の補正計算でも最小値は得られない。いっぽう、バイアス値は補正計算の回数とともにゆるやかに増加し、対数尤度のような急な変化を示さない。負符号の対数尤度の2倍とバイアス補正值(2C\*)との和がEICとなるが、これは3度めの補正計算の付近で最小値を示す。また、最大主応力方向のP波速度も対数尤度やバイアスの値に影響を与えるが、その影響は補正回数ほど大きくはない。補正計算の回数と最大主応力方向のP波速度の最適な値はEICが最小となる値である。このように、EICの値を補正計算の回数および最大主応力方向のP波速度に対してプロットすることによって最適モデルを決める。

第3図はP波速度の測定が行われた各段階、#9から#18、についてのEIC値を補正計算の回数と最大主応力方向のP波速度に対してプロットしたものである。これらの図から各段階における最適な速度構造モデルを求めることができる。補正計算の回数に対するEIC値の変化のようすは、#9から#18の各段階で異なる。#9ではEIC値は補正計算の回数に対して増加している。つまり、初期モデルが最適となり、SIRTによるモデル補正の必要がない。水注入の各段階でEIC値の補正回数に対する変化のようすも変わるが、補正計算の回数は1~3程度で最小となる。水がほぼ岩石試料全体にゆきわたった#18では、ふたたび初期モデルが最適となる。初期モデルでEICが最小となるのは、水注入前の乾燥状態か、注入後時間が経過して岩石全体がほぼ飽和した



第 1 図 前報第 4 図における (R1-S1) における P 波速度の時間変化. 最初は応力の増加とともに P 波速度は小さくなるが, これは応力によって新しく岩石の中にクラックが作られたためである. 一定応力下ではクラックの成長や増加の速度が遅くなり, 速度は徐々に減少する. 水の注入により乾燥したクラックの内部が水で満たされるため, P 波速度は増加する. 最後に P 波速度が減少するが, これは水で飽和された岩石の中にさらにクラックが増え, それらのクラック内部をさらに水が満たして生じる正のフィードバック (Masuda *et al.*, 1990) によって試料の破壊が加速的に進行し, 最終破壊を引き起こすためである.

Fig. 1 The velocity change with respect to time. The plotted are the P-wave velocity at the ray path (R1-S1) of Fig. 4 in the previous report (this issue). When loading, P-velocity decreases because of the stress induced cracks. During the stage of the constant loading, the velocity gradually decreases because the growth rate of stress induced cracks and the increase rate of crack density are reduced. After infiltrating, the velocity increases because water fills the dry cracks. Finally, the velocity decreases again because of rapid increase of the crack density due to the positive feedback process of fracture associated with the high pressure water injection into the stressed rock (Masuda *et al.*, 1990).

状態で, 試料全体に速度の強いコントラストがみられない場合である.

第 4 図は #9 から #18 までの各段階で, 第 3 図をもとに決めた最適モデルに対応する構造を示しているが, この図からわかるように, 乾燥状態 (#9) や, 岩石内に水がほぼ飽和した状態 (#18) では大きな速度コントラストが現れない. このようにもともと速度コントラストが小さいとき, モデルの補正は過剰な速度コントラストを与える. このため, 初期モデルを補正することが無意味と

なり, これが EIC の値に反映される.

第 5 図は, 最大主応力方向の P 波速度を EIC の最小値を与える値とし, 補正計算の回数に対する EIC の変化をプロットしたものである. 多数の折れ線は 50 回の各試行での値を示している. これによって EIC 値の統計的ばらつきがどの程度のものであるかを見ることができる. 第 5 図には対数尤度の負値もプロットされている. バイアス修正値の変化はゆるやかなので, EIC の増減が対数尤度に依存することは第 2 図に示されたと

第1表 EIC値の分散のブートストラップサンプル数に対する変化(#11,  $V_{\max}=6.28$  Km/s)  
Variance of the EIC value. ( $V_{\max}=6.28$  Km/s)

sample number $M \setminus$ iteration	0	1	2	3	4	5
50 (I&S 13)	9.55	11.45	11.03	20.02	24.52	20.64
50 (K 18)	5.29	5.02	10.40	10.30	14.50	15.60
100 (I&S 13)	3.66	5.16	3.44	6.23	9.68	10.33
100 (K 18)	3.35	2.70	4.00	3.70	6.50	11.28
500 (I&S 13)	0.87	0.81	1.36	1.27	1.72	2.08
500 (K 18)	0.62	0.77	0.69	1.40	1.60	1.70
1000 (I&S 13)	0.29	0.47	0.71	0.82	0.92	1.38
1000 (K 18)	0.36	0.40	0.47	0.65	0.80	0.85

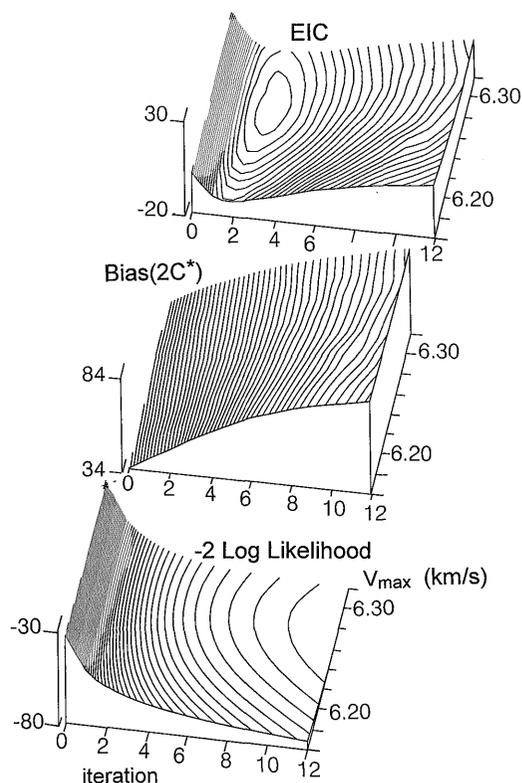
おりであるが、補正によって対数尤度の値が著しく変化するとき、その周辺にEICの最小値が存在する。このことは、これまでSIRTで収束判定として用いられてきた規準、「補正計算のステップ間での残差の2乗和の差が十分小さくなった場合」と意味の上では調和する。以上のように、EICをトモグラフィーでの最適モデルの選択に適用することができる。

#### 4. 最適モデル

水の注入により下側の端面からP波速度が増加してゆくようすを第4図から見る事ができる。注入後のP波速度の増加は不均一におこる。ピクセルの列で表現すれば、第1列の下側( $i=1$ )の速度が早めに増加し、反対側の第5列の側( $i=5$ )は第1列の側に比べ遅れて増加する。速度増加が早めに現れる部分は、そこに水が選択的に浸透したことを示しており、アコースティックエミッションで明らかになったマイクロクラックの弱い集中域に対応している。つまり、水はマイクロクラック密度の大きい側へ選択的に浸透した。最適モデルの速度コントラストはあまり強くない。これは、SIRTにおける補正計算が早い段階で打ち切られたためである。対数尤度を大きくするため(残差の2乗和を減少させるため)に補正計算を繰り返せば、弾性波速度のコントラストは大きくなるが、よりよいモデルとはならない。トモグラフィーで用いられるアルゴリズムの解像力は、データ精度と、波線配置に影響される。これらが不十分、あるいは不適当なため細かい構造を抽出することができない場合には、過度のモデル修正は意味がない。ここで得られた最適モデルはこれらのことがらを反映している。

#### 5. モデルパラメタのバイアスとばらつき

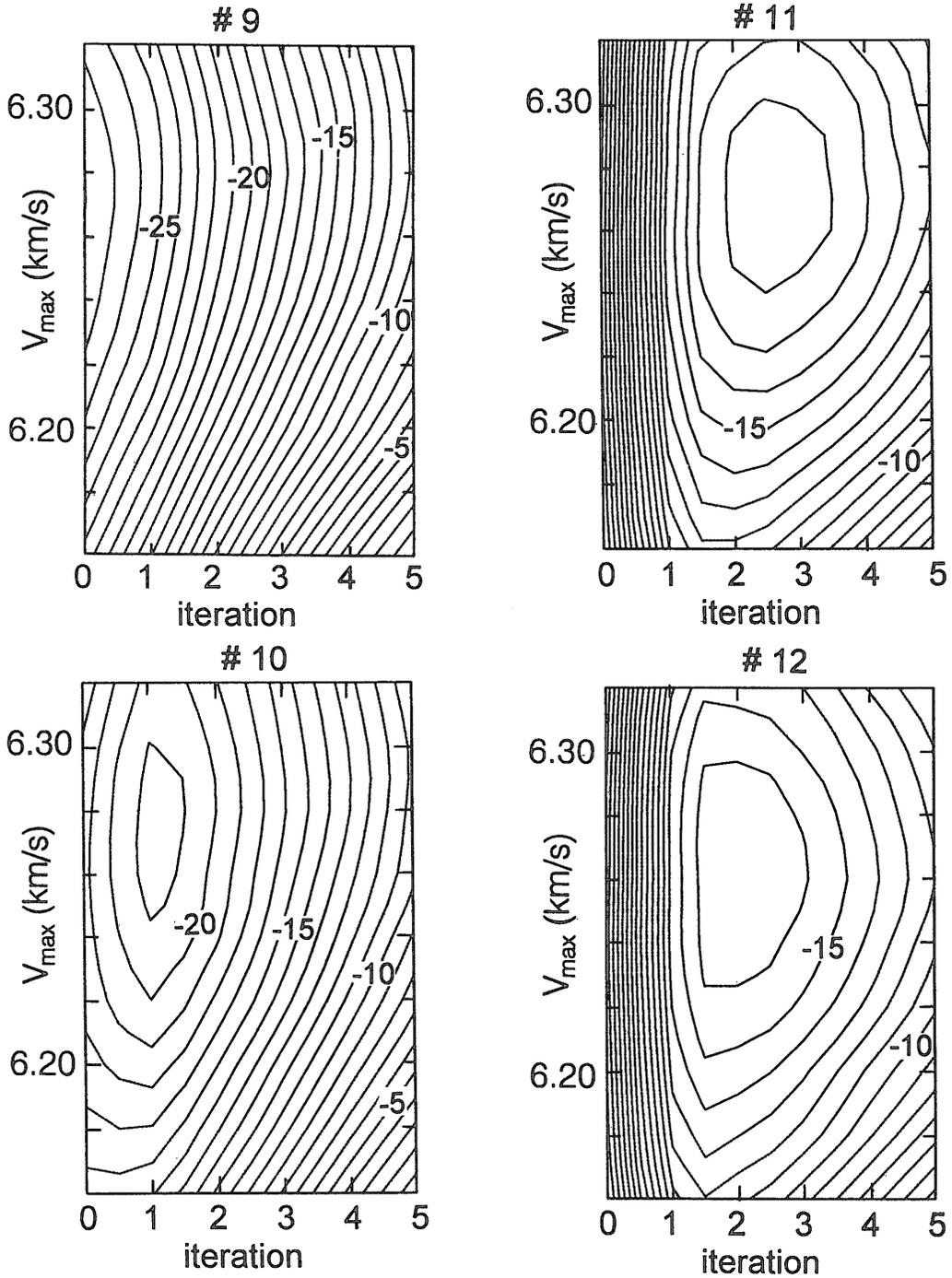
EICによって最適なモデルパラメタを決めることが



第2図 対数尤度の負値の2倍(-2 Log Likelihood), 対数尤度と期待平均対数尤度のバイアス推定値の2倍(Bias 2C\*), および EIC の値の変化を三次元で示したもの。平面の横軸にはSIRTでのモデル修正の回数, 縦軸には試料の最大主応力方向のP波速度( $V_{\max}$ )が示されている。EICはほかのふたつとの和で求められ、この最小値を与える $V_{\max}$ とSIRTの修正回数の組み合わせで最適モデルが得られる。

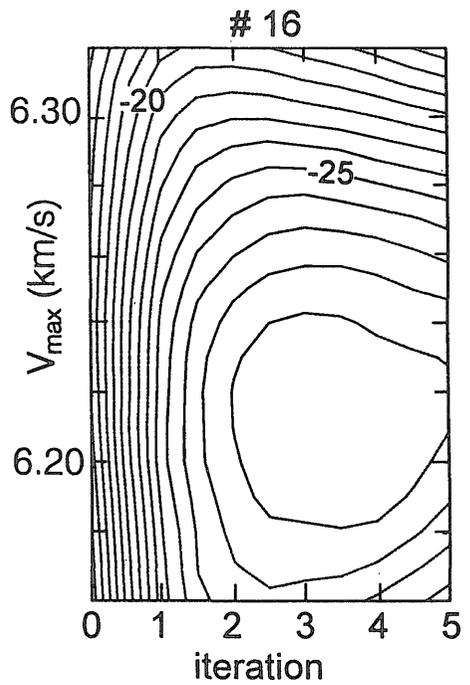
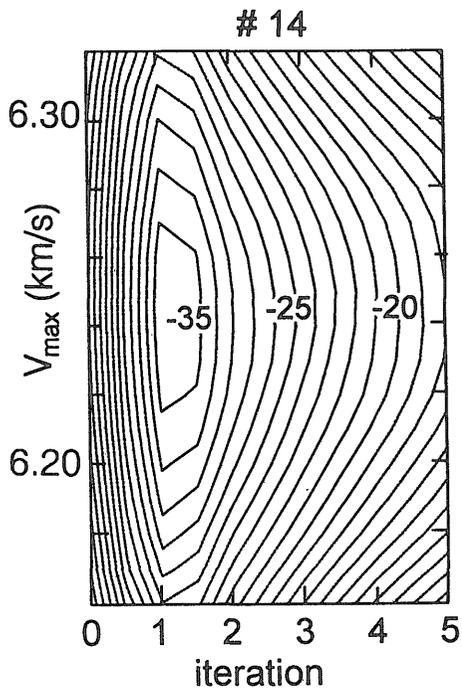
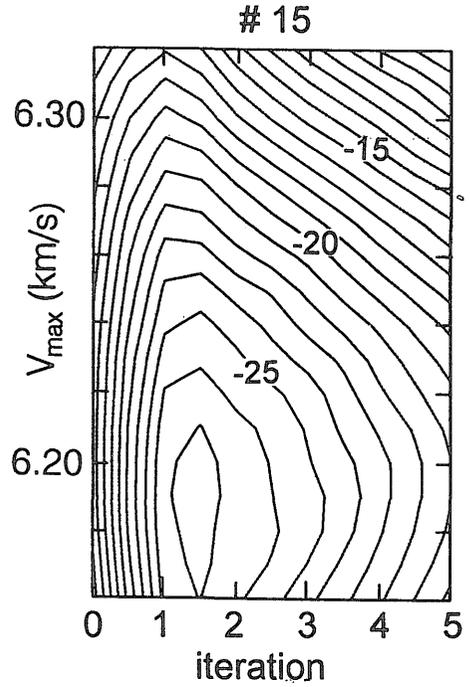
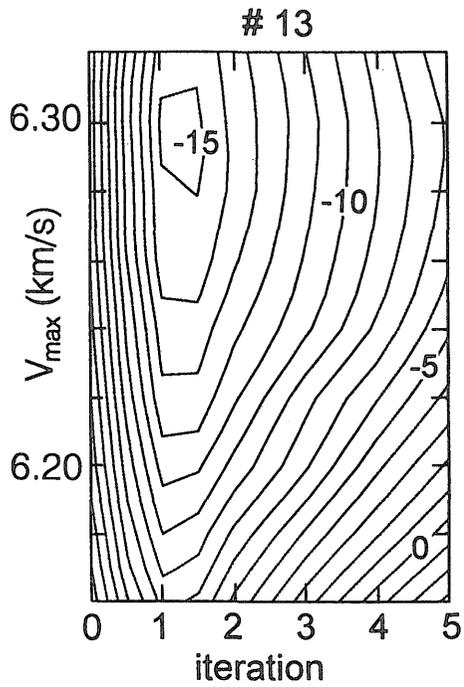
Fig. 2 The 3-D figures of the negative twice value of the log likelihood, the twice of the bias between the log likelihood and the expected log likelihood, and the EIC value. The horizontal and the vertical axes in the projected plane indicate the iteration number of the SIRT and the P-velocity along the maximum stress direction,  $V_{\max}$ , respectively. The EIC value is calculated by adding other two values. The optimum model is obtained from the minimum EIC value, from which the optimum value of  $V_{\max}$  and the optimum iteration number of the SIRT are given.

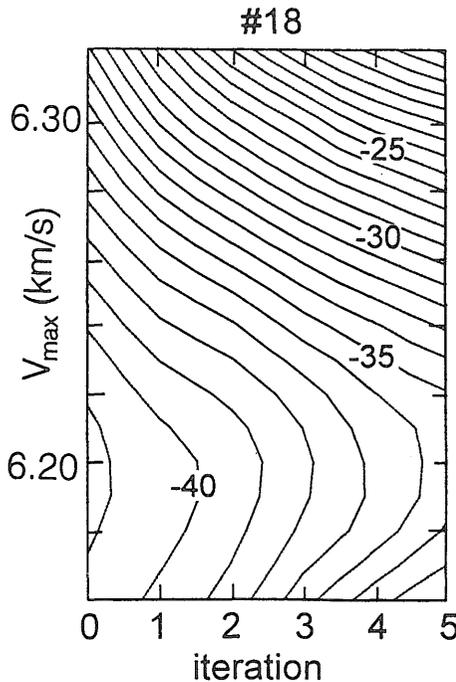
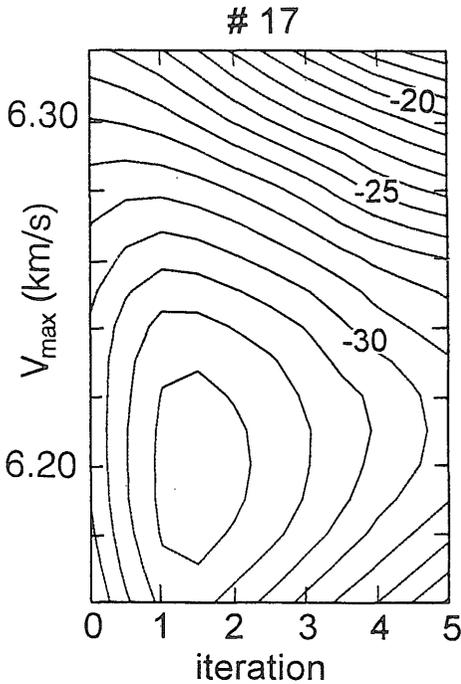
できた。いっぽう、ブートストラップサンプルから計算されたモデルパラメタのばらつきを調べることで、各ピクセルのパラメタ値の誤差を評価することができる。第6図は#11でのブートストラップサンプルから求めたス



第3図 EIC値を等高線で示したもの。#9, #18のようにSIRTでのモデル補正によってもEIC値が小さくならない場合もあるが、これらはモデルの速度コントラストが弱い場合に対応している。

Fig. 3 The EIC value projected on the plane as a function of the iteration number and the  $V_{\max}$  value. The figures of #9 and #18 do not show decreases of the EIC instead of the iterative model corrections. Such cases correspond to the weak velocity contrast of the reconstructed model as shown in Fig. 4.



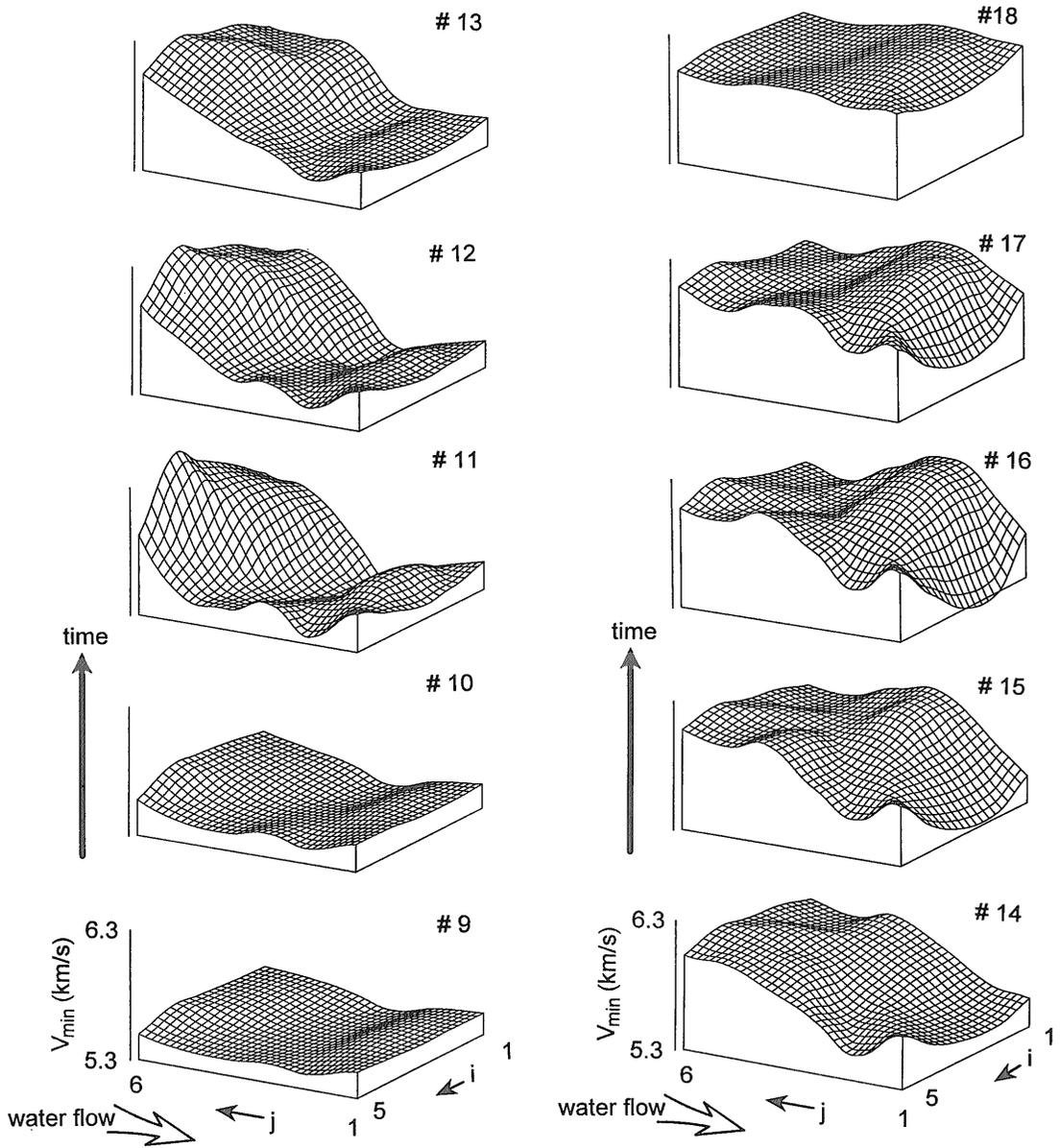


ローネスで、1000個の値の分布が第3列の各ピクセルについて示されている。補正によりローネス分布の平均値は変化する。この平均値は次の第8図に示すようにSIRTで求められたものとの値とは一致しない。補正回数とともに分布の幅も変化する。

第7図はブートストラップサンプルから求めたモデルパラメタの分散を各ピクセルについて示したもので、#11の段階のものが示されている。波線の方向に偏りが少なく密度の高い中央部でブートストラップサンプルで求めたモデルパラメタの分散が小さいことがわかる。分散はモデルパラメタの精度に対応すると考えれば、試料の中央部でパラメタがより高い精度で求められることを示している。また、補正回数の増加とともに分散が大きくなるのは、前報で議論したBackus and Gilbert(1970)が指摘した問題、残差の2乗和を小さくすればモデルの不確かさが増すこと、に対応している。

第8図はブートストラップサンプルから求めたモデルパラメタの分布の平均値と分散を、SIRTから求めた元の値とともに示したもので、横軸はSIRTの補正回数となっている。ブートストラップサンプルから求めたモデルパラメタの分布の平均値とSIRTで得られた元のモデルパラメタとの差をパラメタバイアスと呼ぶことにする。パラメタバイアスは補正計算の回数とともにその絶対値が大きくなる場合と小さくなる場合とがある。パラメタバイアスの符号とモデルの修正の方向とに明かな相関が見られることは興味深い。ブートストラップモデルのパラメタ値がもとのモデルのパラメタ値より大きい場合、すなわちバイアスが正であれば、モデルの修正の方向はパラメタを小さくする側(負方向)となり、バイアスが負であれば修正は正方向となる。多くのピクセルではパラメタバイアスが小さいときにはモデルの修正量も小さくなる。しかし、いくつかのピクセルでは、初期に小さかったパラメタバイアスの絶対値が補正とともに大きくなる。モデルパラメタの補正とともにパラメタバイアスの絶対値が大きくなることは、モデルパラメタの補正で得られた新しい残差分布ともとのモデルとの矛盾が大きくなることを意味する。つまり、このような矛盾が現れることは、これ以上のモデル修正が無意味なことを示している。

第9図は各ピクセルにおけるパラメタバイアスの大きさ(絶対値)をピクセル位置の上に棒グラフで示し、補正計算の回数に対する変化を見たものである。下端のピクセル( $j=6$ の並び)では当初大きなバイアスを示すが、SIRTの補正によってバイアスの値が小さくなる。いっぽう、他のいくつかのピクセルでは補正とともにバイア



第4図 第3図のEICの最小値に対応する速度モデル. 水の注入により, P波速度が一方の側から増加している.

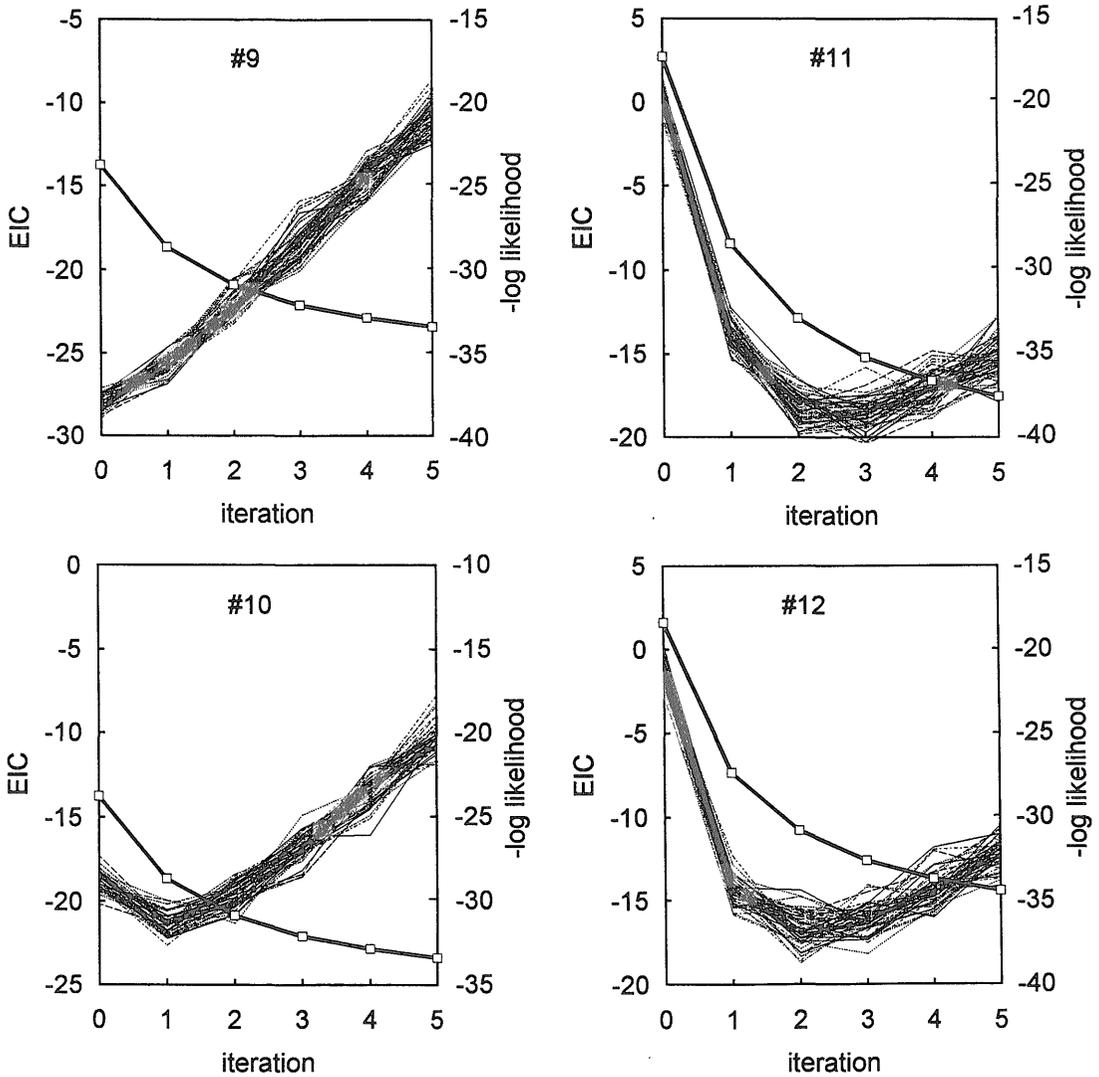
Fig. 4 The P velocity structures of the optimum models obtained from the minimum of EIC. The P-velocity increases gradually from the bottom end where water is injected, showing water flow in the rock sample.

スが大きくなるものがある. このようなピクセルでは補正によってモデルパラメタの推定値の精度が改善されなだけでなく, 誤った推定を行っていることになる.

## 6. 議 論

情報量規準とブートストラップ法の意味

ブートストラップ法は推定されたモデルをもとに計算



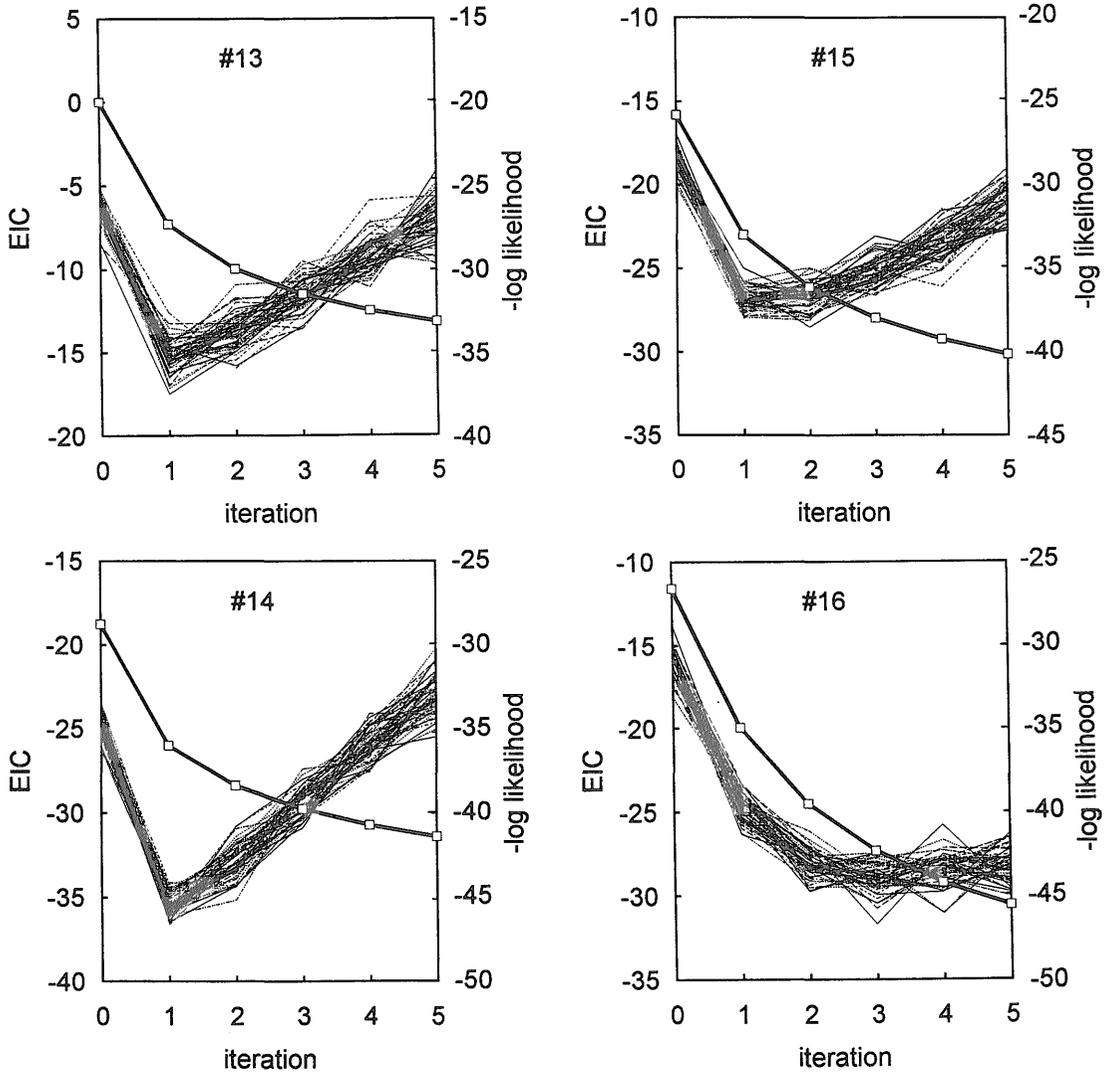
第5図 第3図のEIC最小値を与える  $V_{\max}$  でのEIC変化の断面. EICの値と対数尤度の負値が示されている.

Fig. 5 The section showing the change of EIC as a function of iteration number. The section includes the minimum of EIC in Fig. 3, so that the section corresponds to the optimum  $V_{\max}$ .

された残差分布からランダムに残差を取り出して新しいデータを作り出す。ただひと組のデータからモデルパラメタを求めた場合、データにたまたま含まれた異常値がモデルの推定を著しくゆがめているかもしれない。ブートストラップサンプルでは本来低い確率で発生するはずの異常値を除いたデータの組が含まれることになり、これによって異常値によるモデル推定のゆがみを避けた結果を見ることができる。もし、モデルの修正が残差分布

に含まれるこのような異常値の影響を改善するものでなければ、たとえ残差の2乗和が小さくなる方向にモデルを修正しても不合理な結果を導く可能性がある。

これまでのトモグラフィでは、得られた観測値に最も近い結果を与えるモデルを求めていた。このときの規準は残差の2乗和を小さくすること(すなわち尤度を大きくすること)であった。しかしすでに述べたように、不自然なモデルでも尤度を大きくすることができる。残



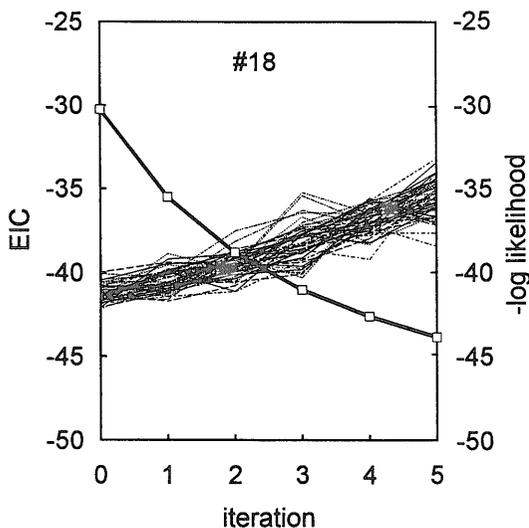
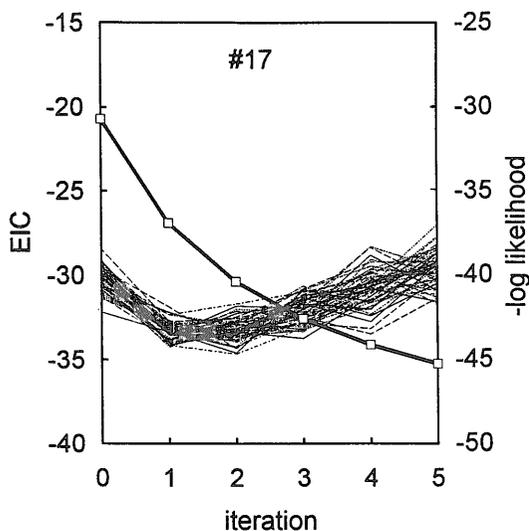
差の値自身は推定されるパラメタの関数でもあるから、残差の2乗和でモデルを評価することは推定モデルに依存する量で推定モデル自身を評価していることになり、残差の2乗和を小さくすることが最適モデルに近づくことを意味しない。つまりこの場合の尤度は見かけのもので、これを大きくすることはデータの真の実現確率を大きくすることにはならない。

いっぽう、情報量規準の場合は残差分布を真の誤差分布にできるだけ近づけるという原理にもとづいている。真の誤差分布をわれわれは知ることはできないが、これと残差分布から作られる平均対数尤度を推定する。この規準によれば、モデルパラメタに制限を加えることな

く、すべてのモデルを比較することができる。

トモグラフィーでは多くの場合、(i)観測値を説明するモデルの探索、あるいは(ii)事前に設定された構造に統計的な誤差を加えた上でモデルを再構成して真のモデルどの程度近いかの評価、が個別に行われていた。ブートストラップ法を用いた場合は、すでに前報で示したように対応するモデルを置き換え、本来のインバージョンのプロセスを繰り返す。したがって、このプロセスは上記(i), (ii)を陰に含んでいることになる。

Jackson and Matsu'ura (1985)やTarantola and Vallette (1982a, b)は最適モデル選定のための確率的根拠を研究し、残差の2乗和とモデルパラメタの不確か



さを同時に小さくする方法を提案した。かれらの方法では、観測値を事前の条件とし、この値が得られたもとのモデルパラメタの実現値としてもっとも実現確率の高いモデルパラメタを探索するとしている。これに対し、情報量規準にもとづく方法ではモデルパラメタの分布を示す必要はない。しかし、坂元他(1983)や小西(1992)に示されたように、対数尤度と平均対数尤度間のバイアスにはモデルパラメタの不確かさがすでに含まれている。バイアスはモデルパラメタが残差分布の変動に対して受ける影響と、パラメタの変化が残差の分布関数の対数に及ぼす影響との積の統計的な総和である。対数尤度

が大きくなるとともに、バイアスが大きくなることは、残差分布の変動に対するモデルパラメタの不確かさが大きくなることを意味し、基本的には Backus and Gilbert (1970)の示した関係と同じである。情報量規準はこの関係をバイアスの中にとりこんでおり、モデルパラメタの不確かさは陽に取り扱われていない。

情報量規準はモデルパラメタの「最もよい値」を推定するための具体的なアルゴリズムを与えるのではなく、モデルのあてはまりの良さを比較するものである。つまり、特定のアルゴリズムや先験的に与えた情報をもとにして得られたいくつかのモデルについて、データが出現する確率分布から推定されるモデルのあてはまりの良さを調べているのである。これは、Jackson and Matsumura (1985)や Tarantola and Vallette (1982b)らの方法が最適なモデルパラメタの探索法として提示されているのとは異なる。しかし、探索されたモデルはどのような場合でも情報量規準によって判定することができる。

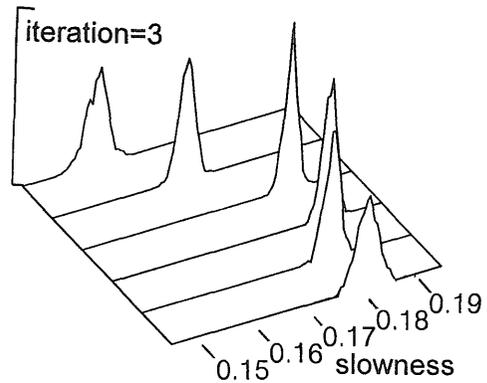
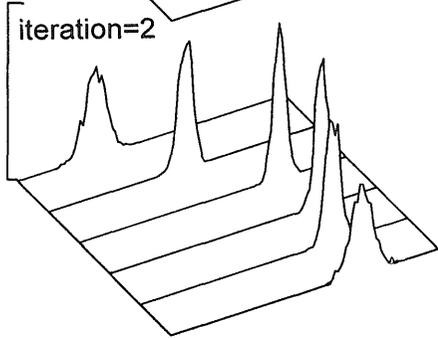
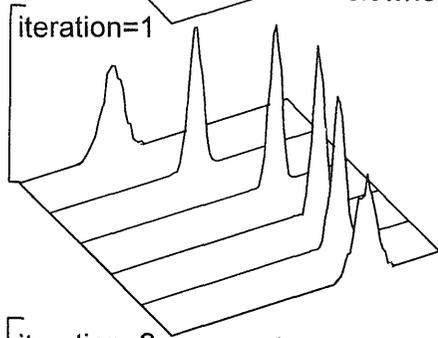
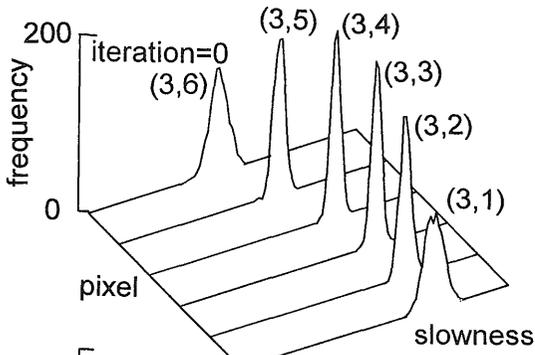
#### 計算時間と乱数発生アルゴリズム

ブートストラップ法では多数のブートストラップサンプルを発生させて統計的推定量を計算するので、必要な計算量は従来の手法に比べて格段に多くなる。しかし、必要なメモリ量はモデル再構成のアルゴリズムに依存するので、ブートストラップ法の採用によってとくに多くなることはない。昨今のコンピュータ技術では、計算速度とメモリ容量で著しい高速化、大容量化が進み、計算量やメモリ容量はもはやトモグラフィにおける技術的障壁ではなくなった。とくに、計算処理速度の向上は著しく、卓上のワークステーションで従来の大型機並みの処理速度が実現されている。したがって、ブートストラップ法をより大きなトモグラフィに利用するための技術的困難はほぼ解決されつつある。

この研究では、計算のためのハードウェアとして HP Apollo 9000モデル730 (CPU: PA-RISC 66 MHz, 公称76 MIPS)を用いた。ブートストラップサンプルを1000個発生させ、補正計算を15回まで行い、モデル補正の各ステップで EIC 値を求めた。使用時間(入出力の時間を除いたもの)は1回の試行につき213秒程度であった。

この値からより大きな問題に対する所要時間を見積もることができる。ただし、所要時間はアルゴリズムの改善などで大幅に短縮することができる。本研究ではアルゴリズムの改善には留意していないので、上記の値は今後さらに小さくすることが可能である。

ブートストラップ法では一様性の高い乱数を用いることが望ましい。われわれは、UNIX システムに付属す



るサブルーチンを利用して48ビットの周期性の疑似乱数を発生させ、さらにこれを Bays and Sharp (1992) の提案したシャッフルルーチンに通して一様性を高めた。また、乱数のシードは内蔵クロックから得た時間をもとに作成して、計算のたびに結果が異なるようにした。

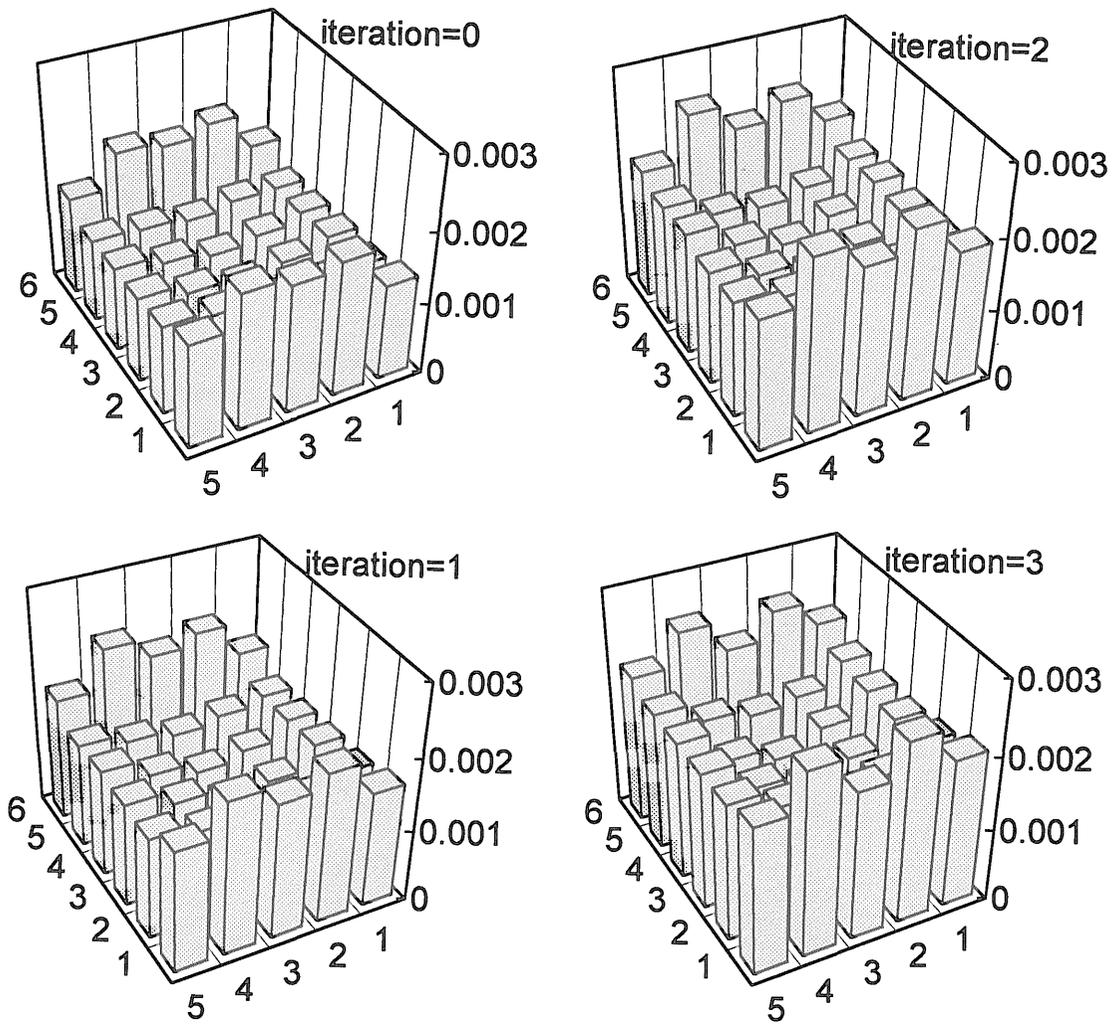
7. まとめ

以上のように、ブートストラップ法をトモグラフィーに応用することで、我々はこれまで任意性の大きかった最適モデルの選択に対して客観的根拠を示すことができた。この手法は弾性波速度トモグラフィーだけでなく、一般に逆問題と呼ばれるすべての問題に適用することができる。とくに最尤法の適用できない場合、データ数が不十分で AIC が適用できない場合には、最適モデルの選択はこの手法によるしかない。

今回われわれが試した SIRT では、データ数が十分でなく、波線の配置が不十分で偽像を生じる可能性が大きい。このような場合でも、ブートストラップ法による方法は最適モデルの選択、推定パラメータの不確かさの判定などを可能にする。また、モデルのパラメータ数、モデルを表現するための数式、トモグラフィーにおけるセル

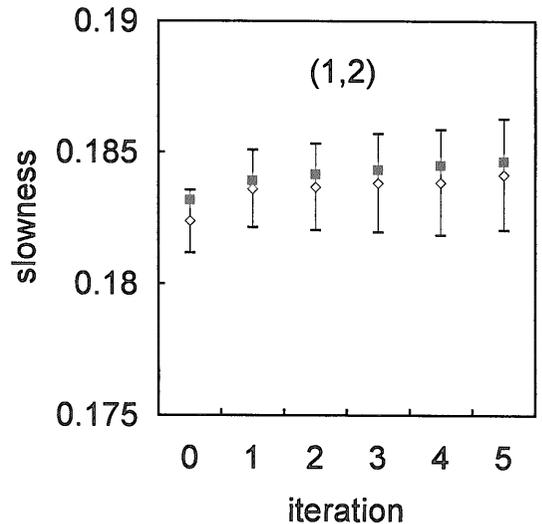
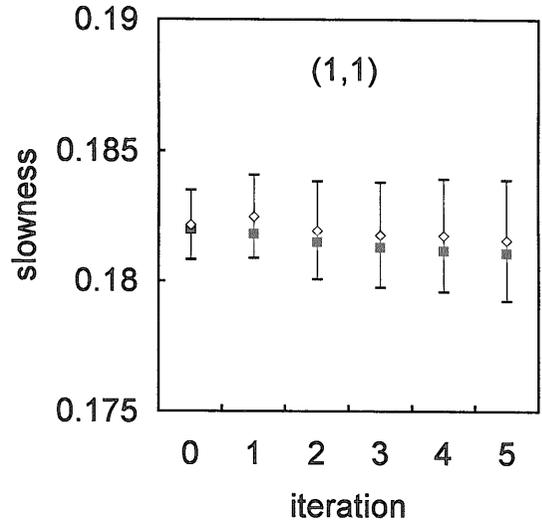
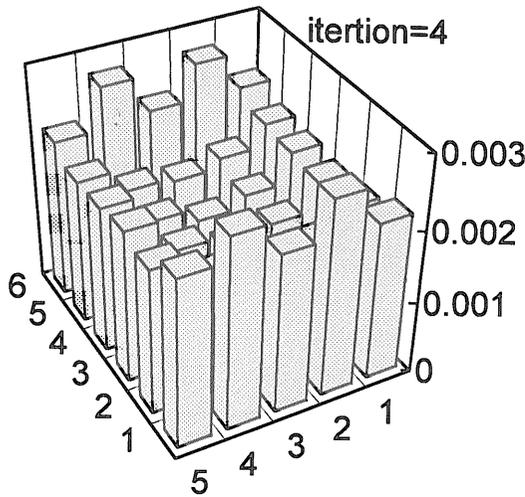
第 6 図 ブートストラップサンプルから SIRT によって計算されたモデルパラメータの分布。1000 個のブートストラップサンプルについて計算されたスローネスを第 3 列における各ピクセルに対して示す。モデルの修正とともにそれぞれの分布の平均値の違いは互いに大きくなり、分布の広がりも大きくなっている。平均値の違いが大きくなるのはパラメータ修正によるもので、分布の広がりが大きくなるのはパラメータの不確かさが大きくなることに対応している。

Fig. 6 Distributions of the model parameter (slowness) determined by the bootstrap sample (the bootstrap model). The slowness distribution of 1000 bootstrap models are shown for the pixels consisting the third column of Fig. 3 in the previous report (Nishizawa *et al.*, 1993). The differences among the mean values of the slowness distribution increase as the iteration number increases. This corresponds to the corrections of the slowness values in the SIRT algorithm. Whereas the increase of the width of the distribution (or variance) corresponds to the increase of uncertainty as the iteration number increase.



第 7 図 ピクセルごとに示したスローネス分布の分散。波線が密で偏りの少ない試料中央部で分散が小さく、周縁部で分散が大きい。分散の大きさはパラメタの推定精度に対応すると考えられるので、この結果から推定されたモデルパラメタの精度を見積もることができる。モデルの修正回数の増加(残差の 2 乗和の減少)とともに分散が大きくなるのは、パラメタの不確かさが増すことに対応している。

Fig. 7 The variance of the slowness distribution shown for each pixel. In the central part of the sample, the variances are small, whereas the variances are large for the pixels located close to the surface. Since the variance corresponds to the uncertainty of the model parameter, the density and the bias of the ray path configuration thus reflect the uncertainty of the model parameter. The variance also increases as the iteration number increases, showing that the uncertainty of the model parameter increases as decreasing the sum of the squares of the residuals.



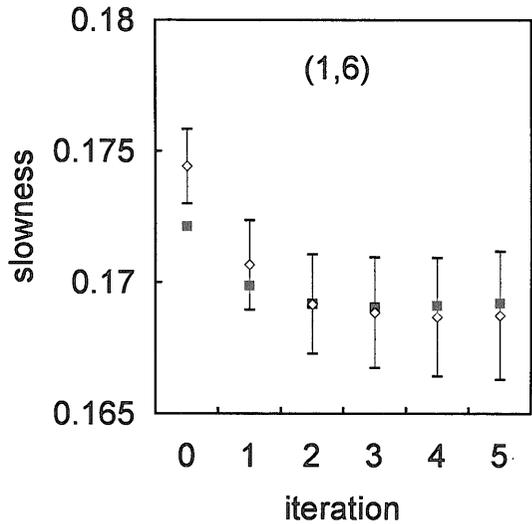
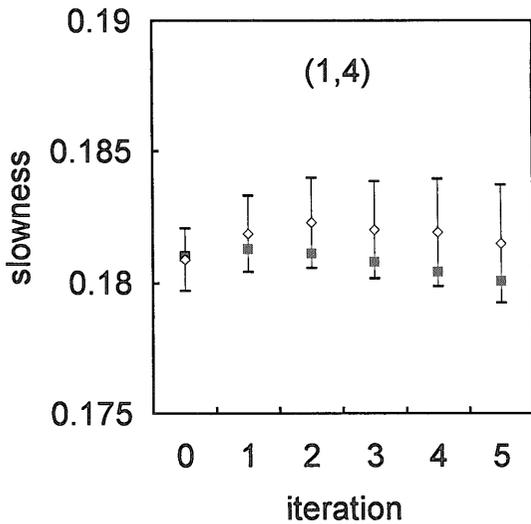
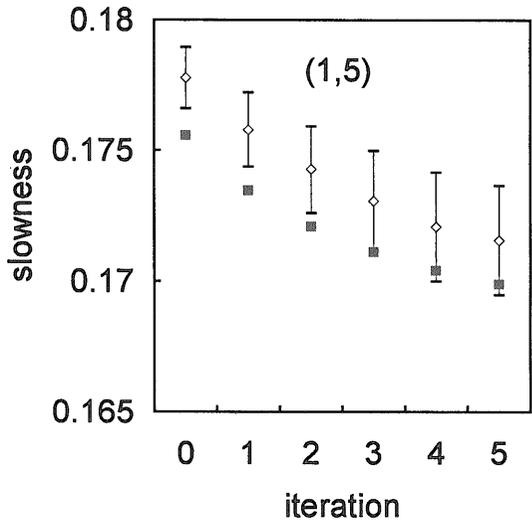
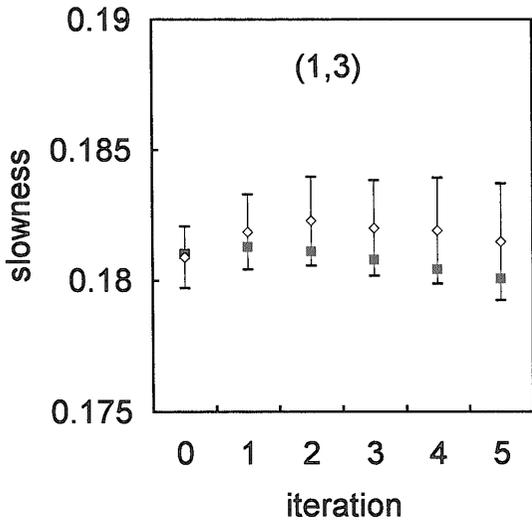
の分割法などのモデル構造についても、任意のモデルを同一の規準で比較できるため、融通性に富んでいる。

地球科学で取り扱う逆問題では、理想的条件で観測を行うことができるのはきわめてまれである。多くの場合不十分な観測データを解析しなければならない。このような場合について、ブートストラップ法は実用的かつ客観的結果を与える手法である。

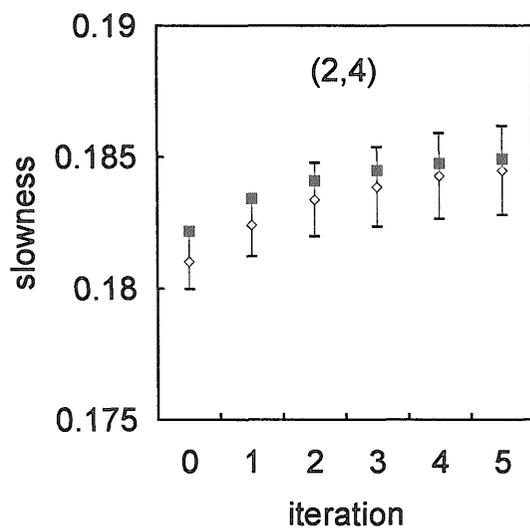
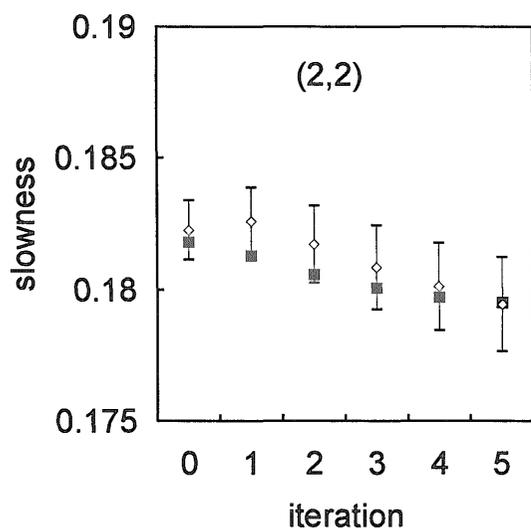
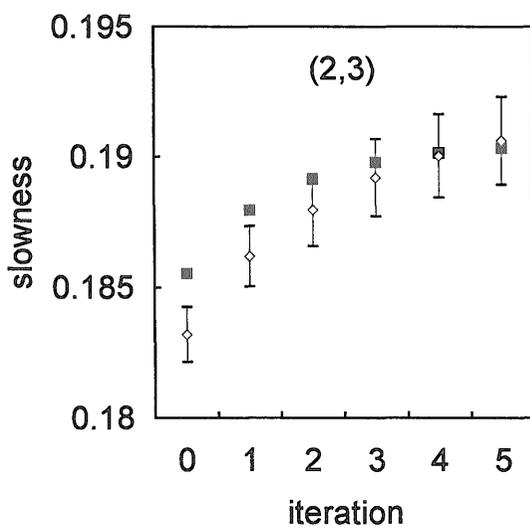
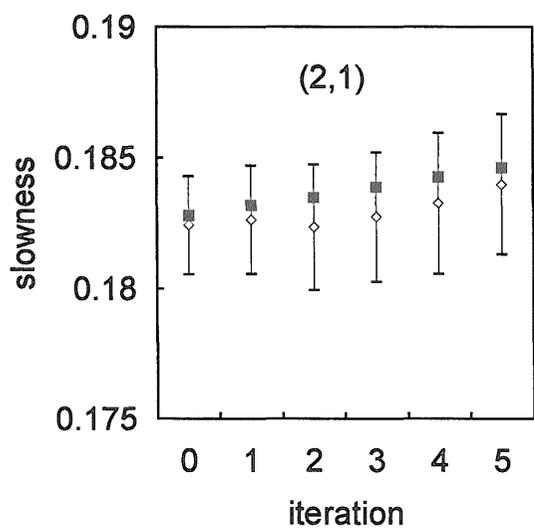
謝辞：文部省統計数理研究所の北川源四郎教授には本研究において重要な情報の提供とご指導をいただいた。地殻物理部村上 裕技官には原稿を読んでいただき貴重なコメントをいただいた。図面作成などでは情報解析課中野司技官の助言・助力を得た。本研究の主たる部分は工業技術院指定研究「断列型貯留層探査法開発」による成

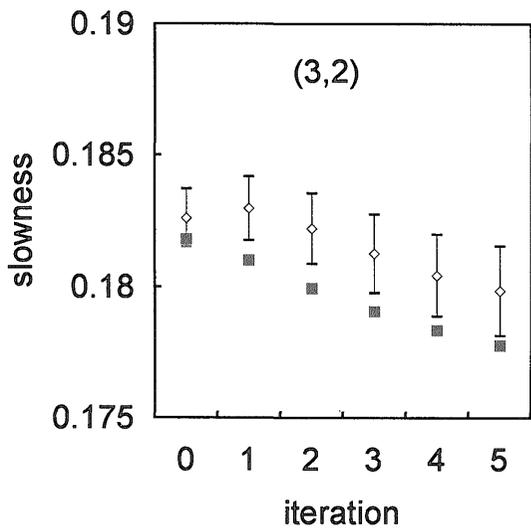
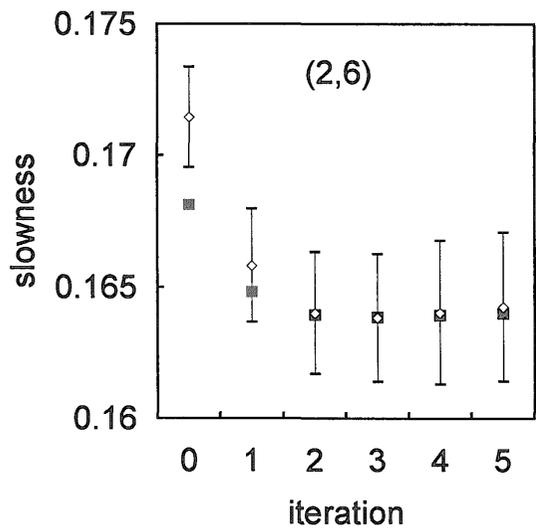
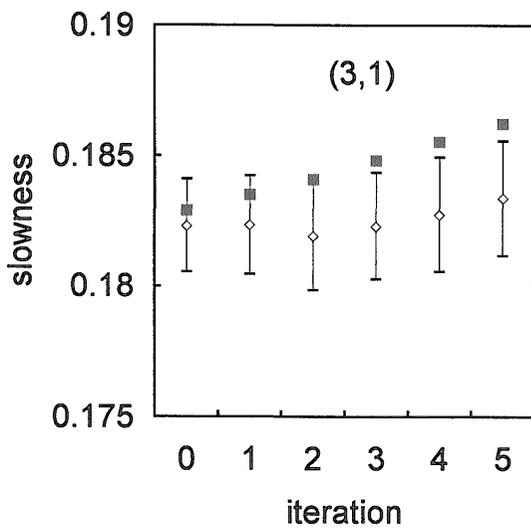
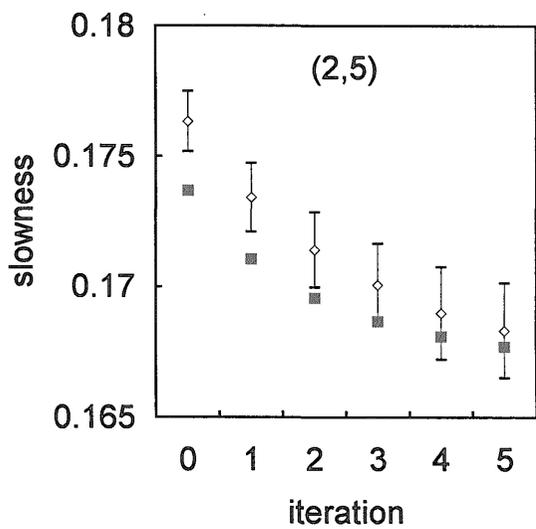
第8図 ブートストラップサンプルから求めたスローネス(ブートストラップモデルのパラメタ)の平均値と分散をSIRTで得られたもとのモデルパラメタとともに示した図。ブートストラップモデルのパラメタともとのモデルパラメタとの差をパラメタバイアスと呼ぶと、この値の正・負は補正の方向とおおむね関係している。パラメタバイアスが正のときは補正は負方向、負のときは補正が正方向となる。これは前報第1,2図の対応を考えれば、真のモデル→もとのモデル、もとのモデル→ブートストラップモデル、となるので合理的である。つまりモデルパラメタが大きめに推定されれば負の方向に、小さく推定されれば正の方向にそれぞれ補正がなされていることになる。しかし、いくつかのピクセルではこのような対応が成り立たない。このときの補正は明らかに不合理であり、このような場合は偽像を作っている可能性がある。

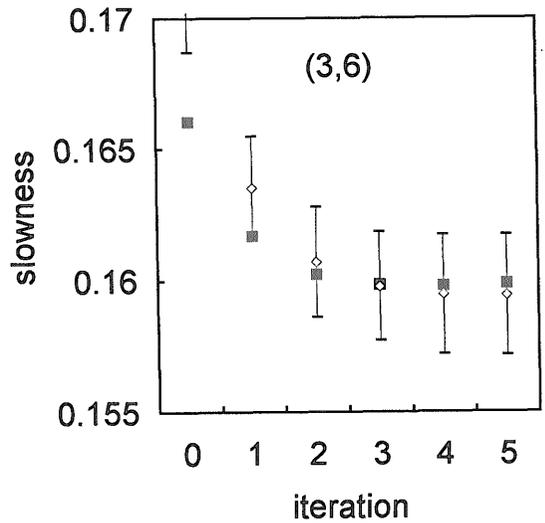
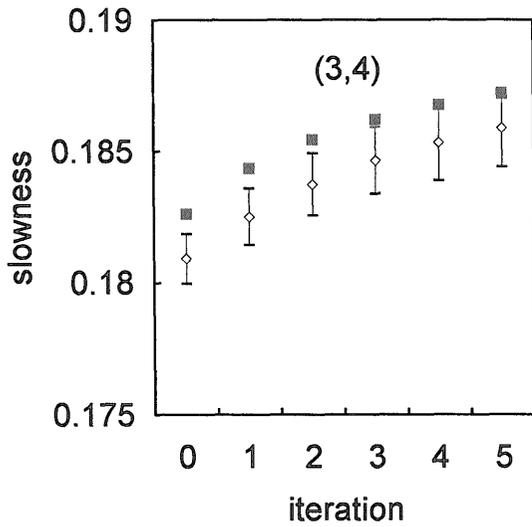
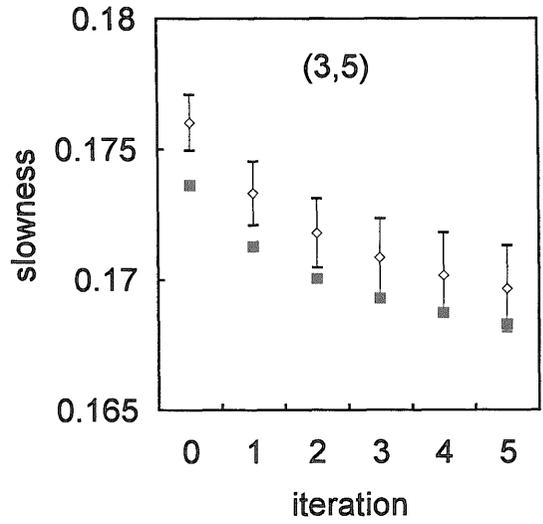
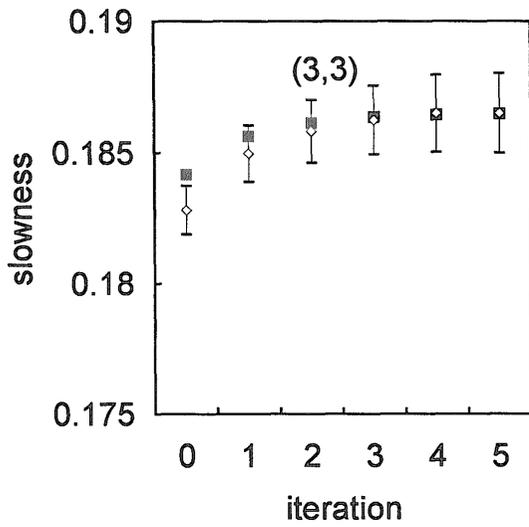
Fig. 8 The mean value and the variance of the slowness distribution obtained from the bootstrap sample (the parameter of the bootstrap model), and the original model obtained from the SIRT plotted as a function of the iteration number. Here we define the term "parameter bias" as the bias

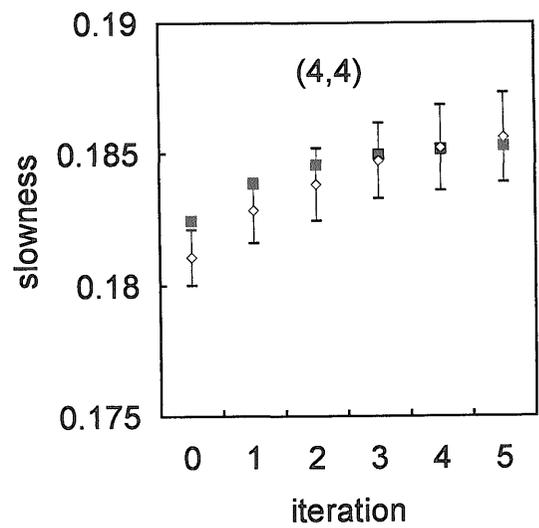
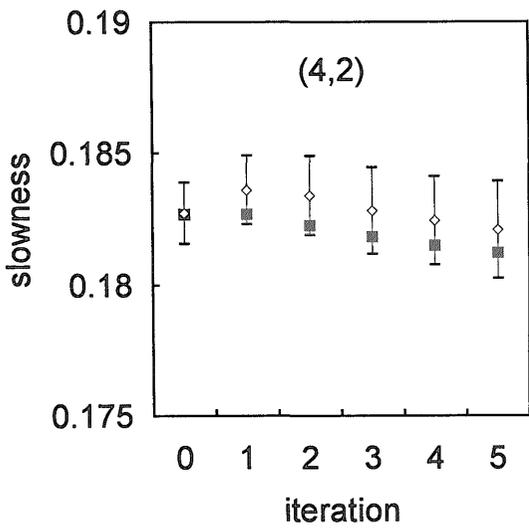
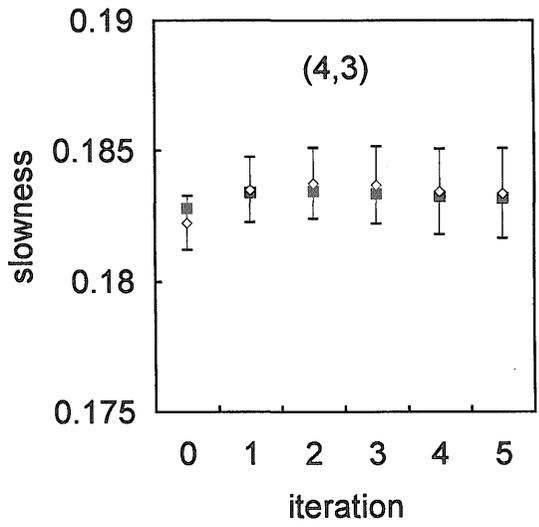
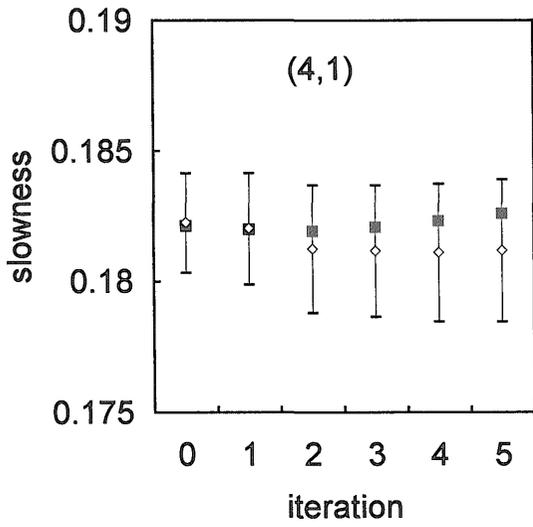


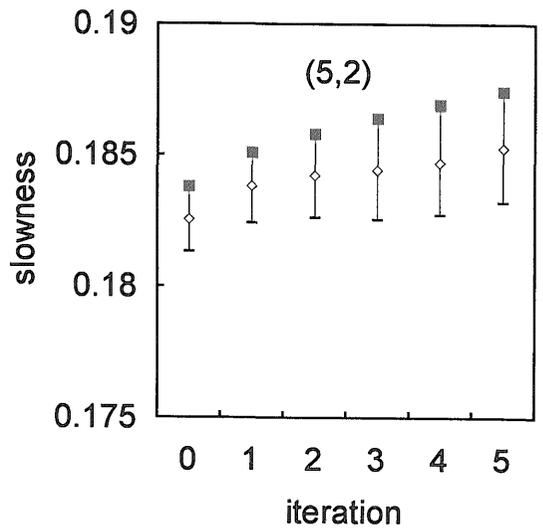
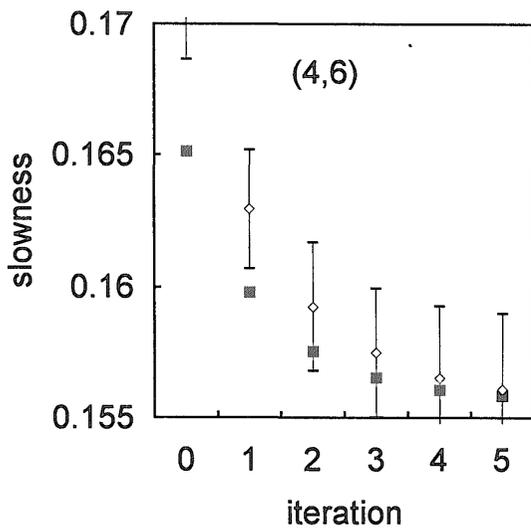
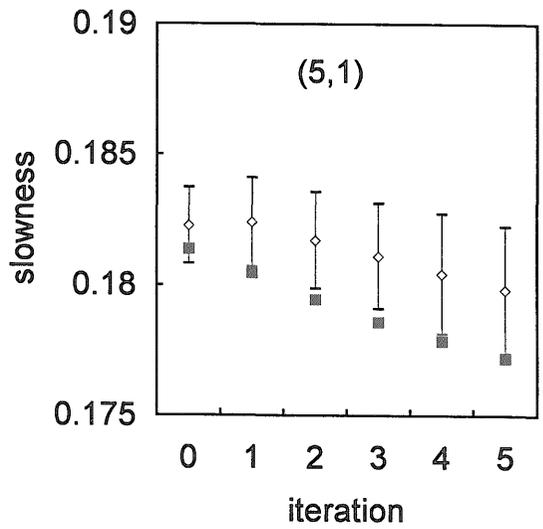
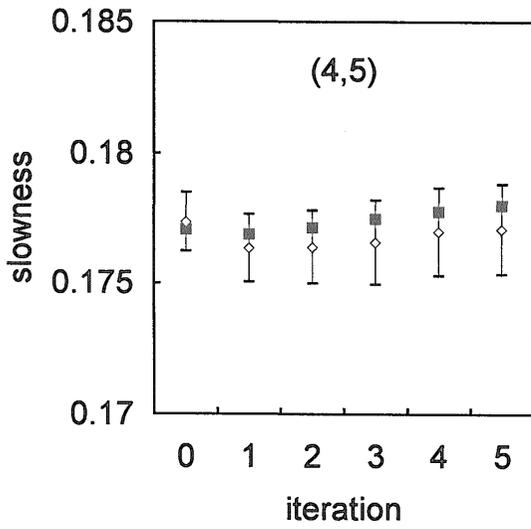
between the parameter from the bootstrap model and the parameter from the original model. It is interesting to note that, in the most of the pixels, the parameter bias corresponds to the direction of parameter correction: The negative parameter bias corresponds to the correction of the model parameter to the positive direction, whereas the positive parameter bias corresponds to that of the negative direction. This relation is reasonable when we consider the relations of Fig. 1 and 2 of the previous report: the true model→the estimated model, and the estimated model→the bootstrap model. The negative parameter bias suggests underestimate of the parameter value, so that it must correspond to the correction in the positive direction and the positive parameter bias, in the negative direction. However, there are some pixels where the parameter bias does not show the reasonable correction. These inconsistency may correspond to the artifacts or false images.

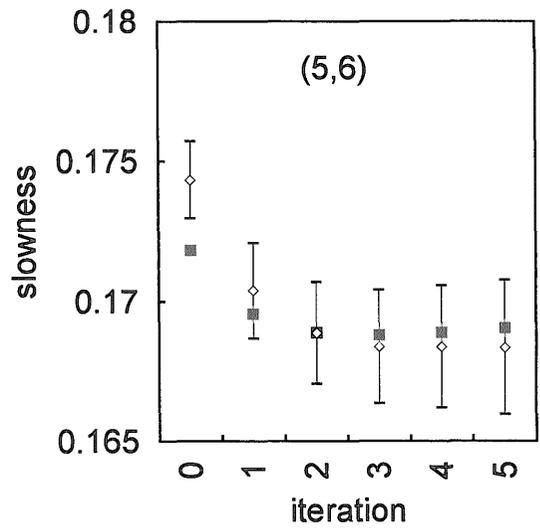
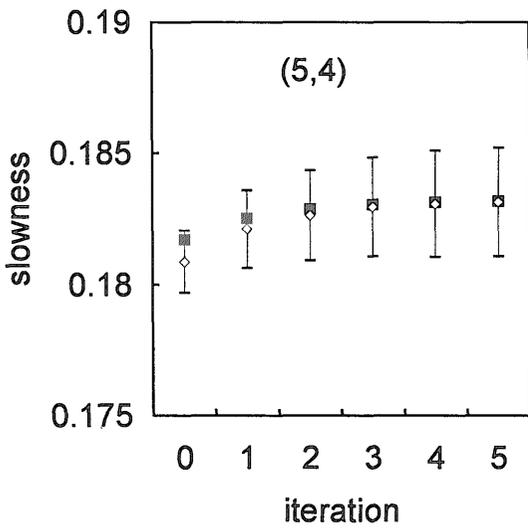
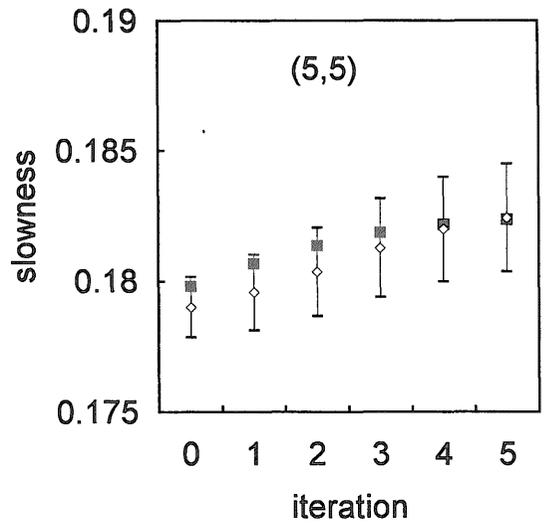
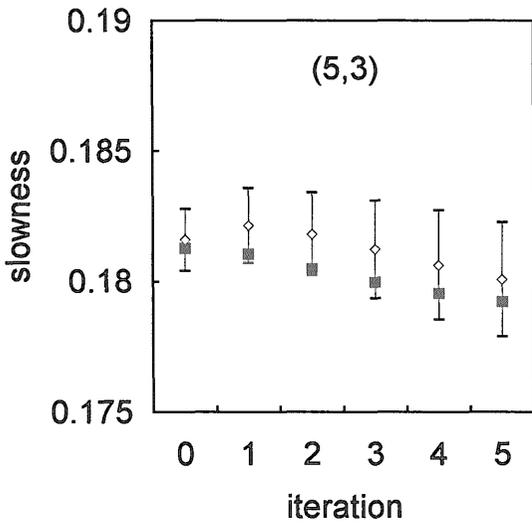


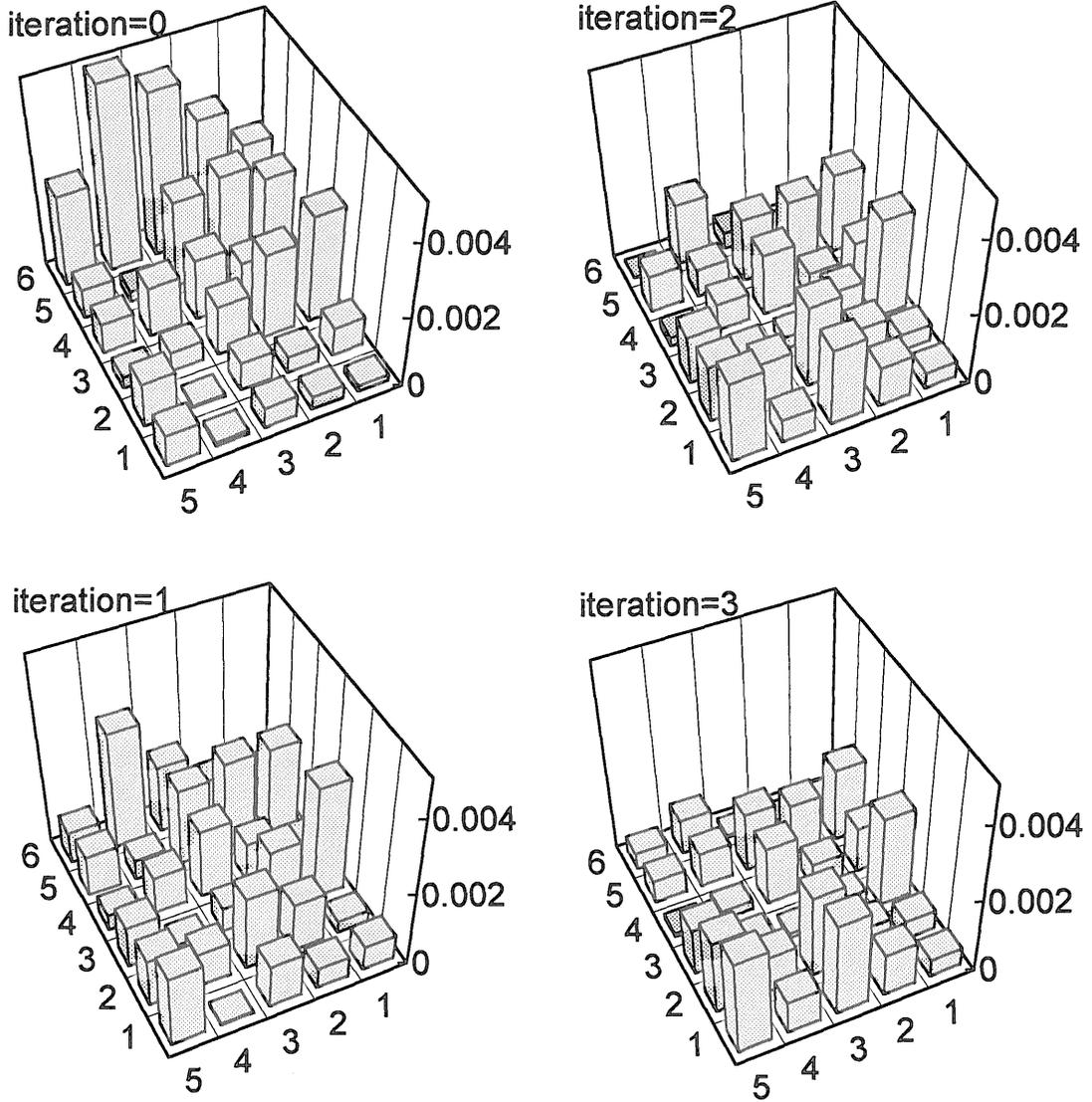






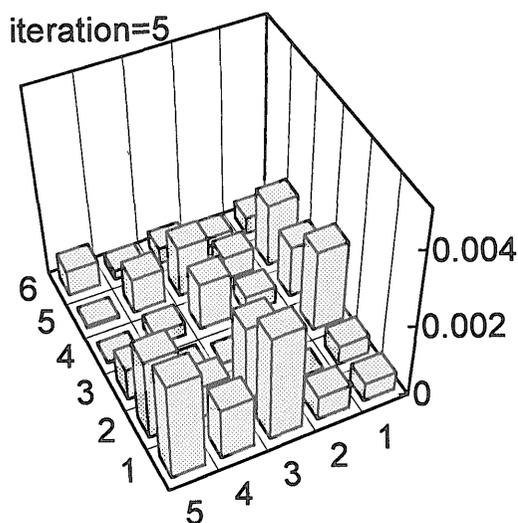
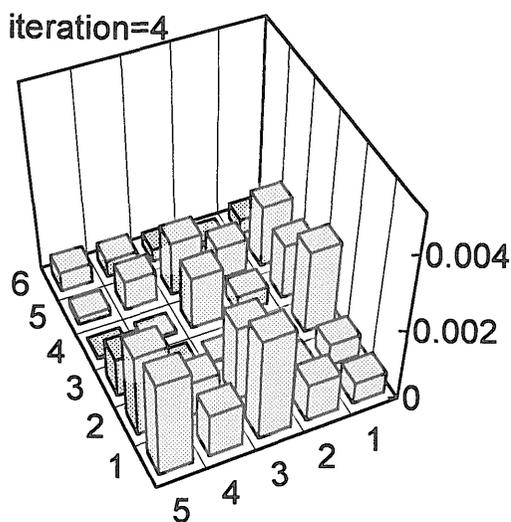






第9図 パラメタバイアスの絶対値を各ピクセルに対して示したもの。補正とともにパラメタバイアスの絶対値が増加するものがあるが、この部分が偽像と考えられる。

Fig. 9 The absolute values of parameter bias. Some pixels show increases of the absolute values of the parameter bias when the iteration number increases. We consider those pixels may produce the artifacts or false images.



果である。また、データと解析法の一部は地質調査所経常研究、および科学技術庁省際基礎研究の成果である。

### 文 献

Backus, G. and Gilbert, F. (1970) Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* vol. A266, p. 123-192.

Bays C. and Sharp, W. E. (1992) Improved random numbers for your personal computer or workstation, *Geobyte*, April 1992, p. 25-

32.

石黒真木夫(1990) 電波望遠鏡データ解析, 統計数理, vol. 38, 2, p. 281-290.

——(1991) 情報量規準とブートストラップ法と時系列解析, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 31, 「時系列に関する推測の理論と応用」, p. 155-159.

Ishiguro, M. and Sakamoto, Y. (1991) WIC: An estimator-free information criterion, *Research Memorandum, the Institute of Statistical Mathematics*, No. 410, p. 1-22.

Ivansson, S. (1983) Remark on an earlier proposed iterative tomography algorithm, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 75, p. 855-860.

Jackson, D. and Matsu'ura, M. (1985) A Bayesian approach to nonlinear inversion, *J. Geophys. Res.* vol. 90, p. 581-591.

北川源一郎(1991) 対数尤度のブートストラップについて, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 31, 「時系列に関する推測の理論と応用」, p. 175-179.

Masuda, K., Nishizawa, O., Kusunose, K., Satoh, T., Takahashi, M. and Kranz, R. (1990) Positive feedback fracture process induced by nonuniform high-pressure water flow in dilatant granite, *J. Geophys. Res.* vol. 95, p. 21583-21592.

小西貞則(1992) ブートストラップ法と予測推定誤差, 東京大学統計学輪講資料1992年10月20日 pp. 24.

Tarantola, A. and Valette, B. (1982a) Inverse problems=Quest for information, *J. Geophys.* vol. 50, p.159-170.

——and —— (1982b) Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, *Rev. Geophys. Space Phys.* vol. 20, p. 219-232.

坂元慶行・石黒真木夫・北川源一郎(1983) 情報量統計学, 共立出版, pp. 236.

(受付: 1993年6月25日; 受理: 1993年10月20日)